கணிதம் - ஓர் அறிமுகம் - II
- மகாதேவன் (ரா)

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை எண்—166

கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்-II

(புகுமுக வகுப்பிற்குரியது)

ஆசிரியர்
ரா. மகாதேவன், எம்.ஏ.,
கணிதப் பேராசிரியர்,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்
தமிழக அரசு

First Edition-August 1968

B.T.P. No. 166

© Bureau of Tamil Publications

Mathematics for P.U.C.

R. Mahadevan

Price Rs. 3-25

Printed by
THE IDEAL PRINTERS,
MADRAS-6

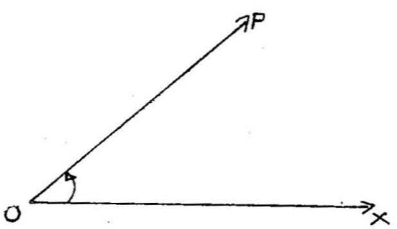
III. கோண கணிதம்

1. கோணமும் கோண அளவையும்

1·1 **கோணம்:** அறிமுறை ஜியோமிதியில் கோணத்தைப் றிய விளக்கம் பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளது. "இரண்டு கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்தித்தால் அவை கோணத்தை க்குகின்றன." கோண அளவையைப் பற்றி அறிமுறை யாமிதி ஒன்றும் கூறவில்லை.

கோண கணிதத்தில் 'கோணம்' என்பது ஓர் 'அள'வாகும் து 'திசை மாற்றத்தை' (Change of direction) அல்லது ருப்பத்தை' (Turning) அல்லது 'சுழற்சி' (Rotation)யை ளப்பதாகும்.

OX, OP என்பவை இரு ர்கோடுகளாகுக. OX என்பது ஒரு திசை யயும், OP என்பது மற் ந திசையையும் குறிப்ப க் கொள்ளலாம். OX ம் திசையிலிருந்து OP ம் திசைக்குத் திரும்பும் து ஏற்படும் திசை மாற்றத்தை, ∠XOP எனும் கோண அளவு கிறது.

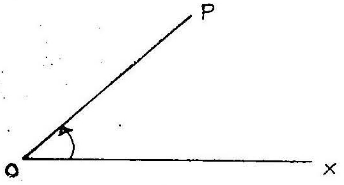


அல்லது, OP எனும் நேர்கோடு, முதலில் OX உடன் சேர்ந் ந்து, பிறகு சுழன்று படத்தில் காட்டிய நிலையில் இருப்பதாகக்

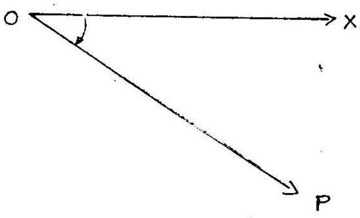
கொள்ளலாம். அப்போது கோணம் XOP, OPயின் சுழற்சியின் அளவைத் தருகிறது எனக் கொள்ளலாம்.

கோணம் XOP, சுழற்சியின் அளவை அல்லது திசைமாற்றத்தைத் தருவது என விளக்கம் தந்ததால் கோணத்தின் அளவுக்கும், அதன் புயங்களின் நீளங்களுக்கும் ஒரு தொடர்புமில்லை எனத் தெளிவாகிறது.

1·2 **நேர்கோணமும், எதிர்கோணமும்,** (Positive and negative angles). OX என்ற திசையிலிருந்து OP எனும் ஆரம் சுழல்கிறது. சுழலும்போது, P எனும் முனை, மையம் Oவை, இடமாகச் சுற்றலாம் [படம் (i)]. ஒரு ஸ்குரு ஆணியை முடுக்கும்போது இடமாகச் சுழற்றுகிறோம். (Anti-clockwise rotation) இவ்வாறு இடமாகச் சுழல்வதால் ஏற்படும் கோணம் *நேர்க் கோணம் (Positive angle) எனப்படும்.



படம் (i)
நேர்கோணம்



படம் (ii)
எதிர்கோணம்

இவ்வாறன்றி, P என்ற முனை O எனும் மையத்தை வலமாகச் சுற்றலாம் (Clockwise rotation). கடிகார முட்கள் வலமாகச் சுற்றுகின்றன. இத்தகைய சுழற்சியைத் தரும் கோணங்கள் எதிர்க் கோணங்கள் (Negative angles) ஆகும் [படம் (ii)]. இதுவே மரபு (Convention) ஆகும்.

1·3 **கோண அளவையின் அலகு** (Unit of measure of angle) நீளம், அல்லது தூரத்தை அளக்க நீட்டல் அளவை இருப்பது போலும், நிறையை அளக்கப் பலவகை நிறுத்தல் அளவைகள்

* 90° உள்ள கோணத்தைச் செங்கோணம் என்று கூறுகிறோம். நேர்க்கோணம் என்று கூறுவதில்லை.

இருப்பது போலும், 'சுழற்சியை' அல்லது திசைமாற்றத்தை அளக்கக் 'கோண அளவைகள்' உள்ளன.

கோண அளவைக்கு அலகாக ஒரு சுற்று, அதாவது, ஒரு வட்டத்தை அலகாகக் கொள்வது சாலச் சிறந்தது எனக் கருதலாம். ஆனால் ஒரு வட்டம் மிகப் பெரிது. ஆகவே 'கால் வட்டத்தை' அலகாகக் கொள்கிறோம். அதாவது சுழற்சியின் நான்கில் ஒரு பாகத்தை ஒரு 'செங்கோணம்' என்று சொல்லுகிறோம்.

அறுபான் அளவை (Sexagesimal system): இத்தகைய கோண அளவையில்

1 செங்கோணத்தின் 90ல் ஒரு பாகம் 1 டிகிரி அல்லது 1 பாகை *

1 டிகிரி அல்லது பாகையில் * *60ல் ஒரு பாகம் ஒரு மினிட்டு அல்லது கலை*

1 மினிட்டில் அல்லது கலையில் 60ல் ஒரு பாகம் ஒரு செகண்டு அல்லது 1 விகலை

கோண அளவை வாய்பாடு:

60 செகண்டு	1 மினிட்டு
60 மினிட்டு	1 டிகிரி
90 டிகிரி	1 செங்கோணம்

[32 டிகிரி, 42 மினிட்டு, 16 செகண்டு என்பதை $32^\circ\ 42'\ 16''$ எனக் குறிப்பது வழக்கம்.]

பயிற்சி 1

I. கீழ்வரும் கோண அளவுகளை டிகிரி, மினிட்டு, செகண்டுகளில் கூறுக.

(*i*) $42 \cdot 56^\circ$ (*ii*) $188 \frac{7^\circ}{36}$ (*iii*) $264 \frac{5^\circ}{64}$

(*iv*) $-32 \cdot 15^\circ$ (*v*) $-72 \frac{5^\circ}{18}$.

---

* தமிழ்ப் பஞ்சாங்கக் கணிதத்தில் பாகை, கலை, விகலை எனும் சொற்கள் வழக்கத்தில் உள்ளன.

II. கீழ்வரும் கோண அளவுகளைப் பின்னமாகக் கூறு.

(i) $42^\circ\ 30'$ (ii) $142^\circ\ 24'$ (iii) $172^\circ\ 28'\ 6''$

(iv) $256^\circ\ 44'\ 15''$.

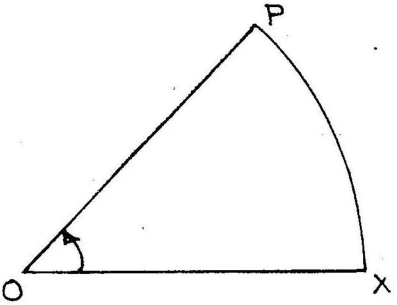
III. கீழ்வரும் கோண அளவுகளைத் தசம பின்னமாக டிகிரியில் கூறுக.

(i) $143^\circ\ 15'$ (ii) $172^\circ\ 45'$ (iii) $51^\circ\ 30'\ 45''$

(iv) − 3[illegible]° 30′ 30″ (v) $-324^\circ\ 15'\ 30''$

1·4 **வட்ட அளவை** (Circular measure): உயர் கணிதத்தில் அறுபான் அளவையைப் பயன்படுத்துவது எளிதன்று. ஆங்குப் பயன்படும் அளவை, வட்ட அளவை (Circular measure) ஆகும். இதில் கோண அளவையின் அலகு 'ரேடியன்' (Radian) எனப்படும்.

ரேடியன் : OXலிருந்து OP எனும் ஆரம் சுழல்கிறது. OP=OX எனக் கொள்வோம். அப்போது Pயின் பாதை XP எனும் வட்ட வில்லாகும். வட்ட வில் XPன் நீளம் ஆரம் OXக்குச் சமம் ஆகுக.



அப்போது கோணம் XOPயின் அளவு ஒரு ரேடியன் எனப்படும்.

ஆகவே ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் நீளமுள்ள ஒரு வட்ட வில்லால், அந்த வட்ட மையத்தில் தாங்கப்படும் கோணம் ஒரு ரேடியன் எனப்படும். இதுவே ரேடியன் என்ற கோண அலகின் விளக்கம் (Definition) ஆகும்.

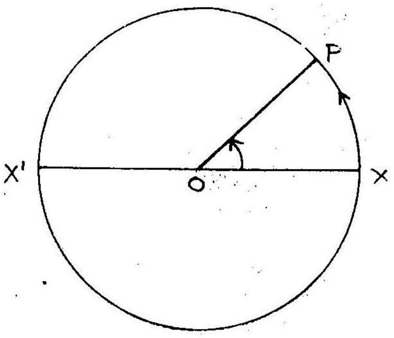
ரேடியனும் டிகிரியும் : ஒரு ரேடியன் அறுபான் அளவையில் எத்தனை டிகிரி என்பதைப் பார்ப்போம்.
வட்டத்தின் விட்டம் XOX′ ஆகுக.

$\angle XOP$ = ஒரு ரேடியன் ஆகுக.

$\angle XOX' = 180^\circ$

வட்டவில் XPயின் நீளம் = வட்டத்தின் ஆரம் OX = r ஆகுக.

ஒரு வட்டத்தில் சம நீளம் உள்ள விற்கள் வட்ட மையத்தில் சம கோணங்களைத் தாங்குகின்றன என்பது அறிமுறை ஜியோமிதியில் ஒரு தேற்றமாகும்.



ஆகவே வில்களால் மையத்தில் தாங்கும் கோணங்களும், வில்களின் நீளங்களும் நேர் விகிதப் பொருத்தத்தில் இருப்பன ஆகும்.

$$\text{ஆகவே}\quad \frac{\text{கோணம் XOX}'}{\text{வில் XPX}'} = \frac{\text{கோணம் XOP}}{\text{வில் XP}}$$

ஆனால், வில் XPX' = அரை வட்டம்

$$= \pi r$$

$$\therefore \quad \frac{180^\circ}{\pi r} = \frac{\text{ஒரு ரேடியன்}}{r}$$

$$\therefore \quad \text{ஒரு ரேடியன்} = \frac{180}{\pi}\ \text{டிகிரி.}$$

குறிப்பு 1 : இதிலிருந்து நாம் காண்பது ரேடியனின் மதிப்பு, வட்ட ஆரத்தின் நீளத்தைப் பொருத்ததன்று.

2. **π ரேடியன் = 180 டிகிரிகள்**

[$\pi = 180$ எனக் கூறலாகாது].

3. x ரேடியன் $= \frac{180}{\pi} x$ டிகிரிகள்

4. D டிகிரி $= \frac{\pi}{180}$ D ரேடியன்

மாதிரி 1. கீழ் வரும் கோணங்களை வட்ட அளவைக்கு மாற்றுக.

(i) 45° (ii) 120° (iii) $52^\circ\ 30'$

(i) 180 டிகிரி = π ரேடியன்

$$\therefore\ 45\ \text{டிகிரி} = \frac{\pi}{180} \times 45 = \frac{\pi}{4}\ \text{ரேடியன்}$$

(ii) 180 டிகிரி $= \pi$ ரேடியன்

$\therefore$ 120 டிகிரி $= \frac{\pi}{180} \times 120 = \frac{2}{3}\pi$ ரேடியன்

(iii) 52° 30′ டிகிரி $= \frac{\pi}{180} \times 52 \cdot 5^\circ$

$= \frac{\pi}{180} \times \frac{105}{2} = \frac{7}{24}\pi$ ரேடியன்

[**குறிப்பு**: ரேடியனில் கோணத்தைச் சொல்லும்போது πக்கு மதிப்பிட வேண்டியதில்லை].

மாதிரி 2. ஒரு ரேடியனின் மதிப்பை 'மினிட்டில்' கூறுக. ($\pi = 3 \cdot 1416$ எனக் கொள்க).

π ரேடியன் = 180 டிகிரி = 180 × 60 மினிட்

1 ரேடியன் $= \frac{180 \times 60}{\pi}$

$= \frac{10800}{3 \cdot 1416}$

= 3438 மினிட்.

குறிப்பு: 1 ரேடியன் = 3438 மினிட் (மினிட் சுத்தமாக) இவ்வாறே $\pi = 3 \cdot 14159$ என இன்னும் திருத்தமான மதிப்பிட்டுக் கணக்கிட, 1 ரேடியன் = 206265 செகண்டு என வரும்.

பட்டியல்: (Tables) வட்ட அளவைக்கு ஏற்ற அறுபான் அளவை, பட்டியல்களில் தரப்பட்டுள்ளன. இதைப் 'பட்டியல் தொகுப்பு'க்களில் (Clarkes Tables போன்றவை) காணலாம்

1·5 **சதாம்ச முறை** (Centesimal system): இம்முறையில்

1 செங்கோணம் = 100 கிரேடுகள் (grades) = 100^g

1 கிரேடு = 100 மினிட்டு = 100′

1 மினிட்டு = 100 செகண்டு = 100″.

இது பிரஞ்சுப் புரட்சிக்குப் பிறகு, மற்ற அளவைகளுக்கு தசாம்ச முறை ஏற்படுத்தப்பட்ட பொழுது, கோண அளவைக்கும், அத்தகைய முறை போன்று இந்த அலகு ஏற்பட்டது. ஆனால் நடைமுறையில் யாரும் இந்த அலகைக் கையாளுவதில்லை.

பயிற்சி 2

1. வட்ட அளவையில் π ன் பின்னமாகக் கோணங்களைக் கூறுக.

(i) 60° (ii) 45° (iii) 30° (iv) 120° (v) 150°
(vi) $7\frac{1}{2}$° (vii) 225° (viii) 54° (ix) 24° 36′
(x) 270° (xi) 360° (xii) 480°.

2. டிகிரியில் கூறுக. கோணங்கள் ரேடியனில் தரப்பட்டுள்ளன.

(i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $\frac{\pi}{3}$ (iii) $\frac{3\pi}{4}$ (iv) $\frac{7\pi}{3}$ (v) 2π

(vi) $\frac{5\pi}{2}$ (vii) 1·21 (viii) ·022 (ix) ·001

3. கீழ்வரும் கோணங்களை 4 தசமத்தானத் திருத்தமாக ரேடியனில் கூறுக. (ரேடியன் = 3431 மினிட் எனக் கொள்க).

(i) 1·18° (ii) 3° 24′ (iii) 45° 18′ (iv) 2° 18′
(பட்டியலில் சரி பார்க்கவும்).

4. ஒரு கோணத்தின் மதிப்பு 'm' மினிட்டு அல்லது 'r' ரேடியன் என்றால் $m:r$ எனும் விகிதம் என்ன?

5. ஒரு சக்கரம் ஒரு நிமிடத்தில் 'n' தடவை சுற்றுகிறது என்றால் 1 செகண்டில் அதன் சுழற்சியை ரேடியனில் கூறுக.

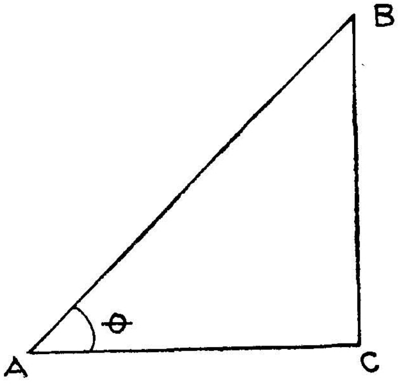
2. குறுங்கோணங்களின் கோணவிகிதங்கள்
(Trigonometric Ratios of acute angles)

2·1 **வடிவொத்த உருவங்கள் (Similar figures):** நாற்கரம், இணைகரம், முக்கோணம், எனும் வடிவிலுள்ள நிலப்பரப்பிற்கும், வயல்களுக்கும், கிடைப் படம் அளவுத் திட்டத்திற்கு (to scales) வரைந்திருக்கிறீர்கள்.

ஒரு குறிப்பிட்ட வயலுக்குப் பல்வேறு அளவுத் திட்டங்களுக்குக் கிடைப்படங்கள் வரையலாம். ஆனால் படங்கள் யாவும் வயலின் வடிவத்தை ஒத்தவை என்று நீங்கள் அறிவீர்கள். இத்தகைய கிடைப்படங்களில், (*i*) ஒத்த கோணங்கள் (corresponding angles) சமமாக இருக்கும். (*ii*) ஒத்த பக்கங்கள் (corresponding sides) ஒரே விகிதத்தில் இருக்கும். அப்போது மட்டுமே உருவங்கள் வடிவொத்தவையாக இருக்கும்.

அறிமுறை ஜியோமிதியில் நாம் காண்பது என்னவெனில், முக்கோணங்களில் ஒன்றன் கோணங்கள் முறையே மற்றதன் கோணங்களுக்குச் சமமானால், ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் சமமாயிருக்கும் என்பதாம்.

2·2 **குறுங்கோணங்களின் கோண விகிதங்கள்:** ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின், ஒரு கோணத்தின் அளவுதரப்பட்டால், பல செங்கோண முக்கோணங்கள் வரைய முடியும். கோணத்தின் அளவு θ ஆகுக. (θ என்பதைத் 'தீடா' என உச்சரிக்கவும். இது கிரேக்கமொழியின் ஓர் எழுத்தாகும்.) பல முக்கோணங்களில் ஒன்றாகிய ABC என்ற முக்கோணத்தில் $\angle A = \theta°$ $\angle C = 90°$ ஆகுக.



சில விளக்கங்கள் (Certain defenitions):

AC என்னும் பக்கம் θ என்னும் கோணத்தின் **அடுத்த பக்கம்** (adjacent side)

BC என்னும் பக்கம் θ என்னும் கோணத்தின் **எதிர்ப்பக்கம்** (opposite side) எனப்படும்.

AB எனும் பக்கம் செங்கோணத்தின் **கர்ணம்** (hypotenuse) எனப்படும்.

2·3 **கோணவிகிதங்களின் விளக்கம்:** முக்கோணத்தில் 'θ' எனும் கோணத்திற்கு $\frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$ $\left(\text{அதாவது } \frac{BC}{AB}\right)$ எனும் விகிதம், θவின் சைன் விகிதம் (sine ratio) எனப்படும். அதை Sin θ எனக் குறிப்போம்.

$\frac{\text{அடுத்தபக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$ எனும் விகிதம் θவின் கோசைன் விகிதம் (cosine ratio) எனப்படும். அதை cos θ எனக் குறிப்போம்.

$\frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்த பக்கம்}}$ எனும் விகிதம் θவின் டான்ஜண்டு விகிதம் (tangent ratio) எனப்படும். அதை tan θ எனக் குறிப்போம். ஆகவே, செங்கோண முக்கோணம் ABCயில் (A = θ, C = 90° இருக்கும்போது)

$$\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{அடுத்தபக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்தபக்கம்}} = \frac{BC}{AC}$$

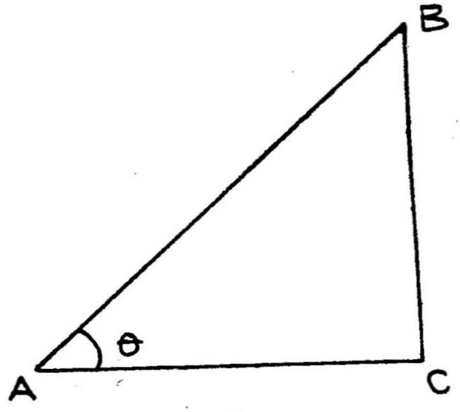
இவை மூன்றும் முக்கியக் கோண விகிதங்களாகும். இவைகளின் தலைகீழ் விகிதங்களாகிய மூன்று விகிதங்களுக்கும் தனிப்பெயர்கள் உள்ளன.

கோசீகண்டு $\theta = \frac{1}{\text{சைன் }\theta}$ அதாவது $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

சீகண்டு $\theta = \frac{1}{\text{காஸ் }\theta}$ அதாவது $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

கோடான்ஜண்டு $\theta = \frac{1}{\text{டான் }\theta}$ அதாவது $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

குறிப்பு 1: θ என்ற அளவுள்ள கோணத்தையுடைய பல செங்கோண முக்கோணங்கள் வரையலாம் என்றும் அவற்றுள் ABC என்பது ஒரு முக்கோணம் என்றும் கூறினோம்.



ABC, PQR XYZ என்பவை இத்தகைய செங்கோண முக்கோணங்கள். இவற்றுள்

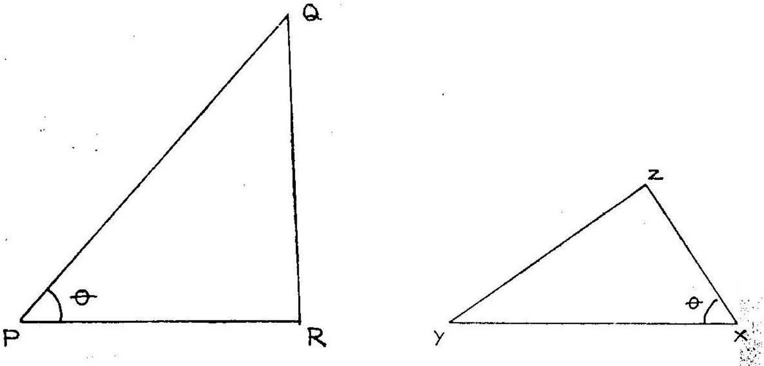
$\angle A = \angle P = \angle X = \theta$

$\angle C = \angle R = \angle Z = 90°$

ஆகவே, இவை வடிவொத்த முக்கோணங்கள்

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{QR}{PQ} = \frac{YZ}{XY} = \frac{\theta\text{வின் எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \sin\theta$$

எல்லா முக்கோணங்களிலும் θவின் சைன் விகிதம் சமமாக இருப்பதைக் காண்கிறோம்.



ஆகவே கோணவிகிதங்கள், கோணத்தைப் பொருத்ததே யன்றிப் பக்கங்களைப் பொருத்தவையல்ல.

ஒரு கோணத்திற்கு என ஒரு சைன் விகிதம்தான் உள்ளது. இதுபோன்றே மற்ற கோணவிகிதங்களும் இருக்கும்.

குறிப்பு 2: கோணங்களை டிகிரிகளிலோ அல்லது ரேடியனிலோ அளக்கிறோம். ஆனல், கோணவிகிதங்கள் வெற்று எண் (mere numbers) – அளவையல்ல – என்பது கவனிக்கத்தக்கது.

குறிப்பு 3: மேலே தரப்பட்டுள்ள கோணவிகிதங்களின் விளக்கங்கள் (definition) குறுங்கோணங்களுக்கு மட்டும் பொருந்தும் என்பதை வற்புறுத்துகிறோம். பொதுவாக எத்தகைய கோணத்தின் விகிதங்கள் எவையாக இருக்கும் என்பதைப் பின்னர் பார்க்கலாம்.

குறிப்பு 4: ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் எதிர்ப் பக்கமும், அடுத்தபக்கமும், கர்ணத்தைவிடச் சிறியனவாதலால், கோணங்களின் சைன், கோசைன் விகிதங்களின் மதிப்பு 1ஐ விடக் குறைவான தகுபின்னங்களாகும் (Proper fraction).

குறிப்பு 5: கோணத்தின் சைன், கோசைன் விகித விளக்கங்களிலிருந்து தெரிவது

எதிர்ப்பக்கம் $=$ கர்ணம் $\times \sin\theta$

அடுத்த பக்கம் $=$ கர்ணம் $\times \cos\theta$

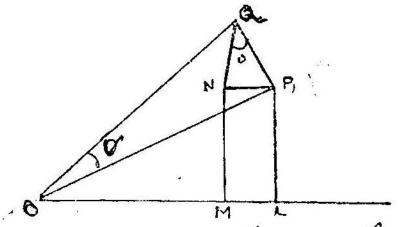
அதாவது $BC = AC \sin\theta$

$AB = AC \cos\theta$

இவ்வாறு உடனே எழுதப் பழகுவது பின்னர் பயனளிக்கும்.

பயிற்சி 3 (வாய்மொழி)

(விடையளிக்கக் கீழ்க்காணும் படத்தைப் பயன்படுத்துக.)



படத்தில் $QM \perp OM$; $PL \perp OL$, $QP \perp OP$, $PN \perp MQ$

1. படத்தில் உள்ள எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்தி அதில் காணும் செங்கோண முக்கோணங்களைக் கூறுக.

2. கீழ் வரும் கோணவிகிதங்களைக் கூறுக.

[மாதிரி: $\tan PQN = \dfrac{PN}{NQ}$]

(i) sin POL *(ii)* sin POQ *(iii)* sin QOM *(iv)* cos POL
(v) cos POQ *(vi)* cos MOQ *(vii)* sin NPQ *(iiiv)* cos NQP
(ix) tan LOP *(x)* cos OQP *(xi)* cos POQ *(xii)* tan MOQ

3. கீழ் வரும் விகிதங்களை சைன், கோசைன், டான்ஜண்டு விகிதங்களுள் ஒன்றில் கூறுக.

[மாதிரி: $\frac{OM}{OQ} = \cos MOQ$ அல்லது $\sin OQM$.]

(i) $\frac{MQ}{OQ}$ (ii) $\frac{LP}{OP}$ (iii) $\frac{PL}{OL}$ (iv) $\frac{NP}{QP}$ (v) $\frac{QP}{OP}$

(vi) $\frac{QP}{OQ}$ (vii) $\frac{NQ}{PQ}$ (viii) $\frac{QN}{NP}$ (ix) $\frac{QM}{OQ}$ (x) $\frac{OP}{OQ}$

4. காலியான இடத்தைத் தக்க கோண விகிதத்தால் நிரப்புக.

[மாதிரி: $OM = QO \times \cos QOM$ அல்லது $QO \times \sin OQM$].

(i) $LP = OL \times$ ______ (ii) $PN = PQ \times$ ______

(iii) $PQ = OP \times$ ______ (iv) $QM = OQ \times$ ______

(v) $QN = PQ \times$ ______ (vi) $OP = OQ \times$ ______

(vii) $PN = NQ \times$ ______ (viii) $LP = OP \times$ ______

(ix) $PQ = OP \times$ ______ (x) $OL = OP \times$ ______

பயிற்சி 4

கீழ்வரும் பக்கங்களையுடைய செங்கோண முக்கோணங்களுக்குத் துணைப்படம் வரைந்து மிகச் சிறிய கோணத்தை 'x' எனக் குறிக்கவும். ஒவ்வொரு படத்திலிருந்தும் xன் சைன், கோசைன், டான்ஜண்டு விகிதங்களை முறையே எழுதுக.

(i) 3, 4, 5 (ii) 20, 21, 19 (iii) 11, 60, 67

(iv) 9, 40, 41 (v) 8, 6, 10 (vi) 12, 5, 13

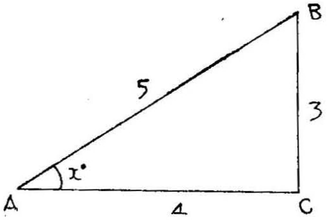
(vii) 1, $\sqrt{3}$, 2 (viii) 35, 12, 37 (ix) 8, 15, 17.

ஒரு கோணத்தின், ஒரு கோண விகிதம் தரப்பட மற்றக் கோண விகிதங்களைக் காணும் முறை.

மாதிரி: $\sin x^\circ = \frac{3}{5}$ என்றால் $\cos x^\circ$, $\tan x^\circ$ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

$\sin x^\circ = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{3}{5}$ ஆனதால், கர்ணம் 5 அலகுள்ளதும், ஒரு பக்கம் 3 அலகுள்ளதுமான ஒரு செங்கோண முக்கோணம் துணைப்படமாக வரைக. ABC என்ற துணைப்

படத்தில் AB, கர்ணம் = 5, BC = 3 என்றால் $\lfloor A = x^\circ$; AC = 4 (பிதகோரஸ் தேற்றப் படி) படத்திலிருந்து $\cos x^\circ = \frac{4}{5}$, $\tan x^\circ = \frac{3}{4}$ எனக் காண்கிறோம்.



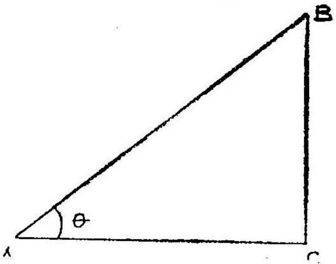
[குறிப்பு: ஒரு கோண விகிதம் தருவது, ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களைத் தருவதற்கு ஒப்பாகும். துணைப் படம் வரைந்து மூன்றாவது பக்கத்தைப் பிதகோரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் காணவும். மற்றக் கோண விகிதங்களைப் படத்திலிருந்து எழுதவும்.]

பயிற்சி 5

1. $\sin A = \frac{5}{12}$ என்றால் cos A, tan A காண்க.
2. $\cos x = \frac{3}{8}$ என்றால் tan x, sec x காண்க.
3. $\tan \theta = \frac{15}{8}$ என்றால் cosec x, cos x காண்க.
4. $\sec A = \frac{29}{20}$ என்றால் sin A, tan A, காண்க.
5. $\tan x = \frac{35}{12}$ என்றால் sin x, sec x காண்க.
6. $\operatorname{cosec} x = \frac{29}{21}$ என்றால் sec x, tan x காண்க.
7. $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ என்றால் tan B, cosec B காண்க.
8. $\sec A = \frac{7}{4}$ என்றால் sin A, tan A காண்க.
9. $\tan A = \frac{a}{b}$ என்றால் sin A, cos A காண்க.
10. $\sin A = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ என்றால் tan A, sec A காண்க.

3. ஒரு கோணத்தின் கோண விகிதங்களிடையே உள்ள சில முக்கிய தொடர்புகள்

3·1 ஏனைய கோண விகிதங்களை சைன், கோசைன் விகிதங்களில் கூறமுடியும்.



படத்தில் $\angle A = \theta$; $\angle C = 90°$

$$\sin\theta = \frac{BC}{AB}; \quad \cos\theta = \frac{AC}{AB}$$

$$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{BC}{AB} \div \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AC} = \tan\theta$$

$$\therefore \boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

2. $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} =$

$$\therefore \boxed{\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

3. ஏற்கெனவே, $\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$, $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ என்று கூறியுள்ளோம்.

இவ்வாறு ஒரு கோணத்தின் சைன், கோசைன் விகிதங்களில் ஏனைய நான்கு கோண விகிதங்களைக் கூறமுடிகிறது.

பயிற்சி 6 (வாய்மொழி)

A எனும் கோணத்தின் சைன், கோசைன் விகிதங்கள் தரப் பட்டுள்ளன ; tan A, cot A விகிதங்கள் கூறுக.

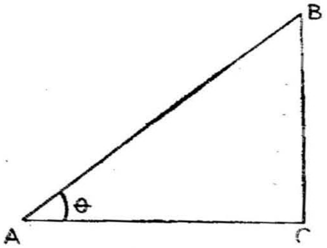
(i) $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ (ii) $\left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$ (iii) $\left(\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right)$

(iv) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (v) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (vi) $\left(\frac{40}{41}, \frac{49}{41}\right)$

(vii) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (viii) $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (ix) $\left(\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right)$

(x) $\left(\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right)$

3·2 ஒரு கோணத்தின் சைன், கோசைன் விகிதங் களிடையேயுள்ள தொடர்பு. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ **எனக் காட்ட.**



ABC என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில் $\angle C = 90°$ $\angle A = \theta$ ஆகுக.

$$\sin \theta = \frac{BC}{AB} \qquad \therefore \sin^2 \theta = \frac{BC^2}{AB^2}$$

$$\cos \theta = \frac{AC}{AB} \qquad \therefore \cos^2 \theta = \frac{AC^2}{AB^2}$$

$$\therefore \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}$$

ஆனால் பிதகோரஸ் தேற்றப்படி

$$BC^2 + AC^2 = AB^2$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$$

$$\therefore \quad \boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

குறிப்பு 1 : கோண விகிதங்களின் அடுக்குகளாகிய $(\sin\theta)^2$, $(\cos\theta)^2$, $(\tan\theta)^2$ என்பனவற்றை முறையே $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$; $\tan^2\theta$ எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

குறிப்பு : 2 மேற்கூறிய தொடர்பு மிகவும் முக்கியமானது. ஒரு கோணத்தின் சைன் விகிதத்தின் வர்க்கமும், கோசைன் விகிதத்தின் வர்க்கமும் சேர்ந்து 1 என மதிப்புடையதாகும். அதாவது

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\sin^2 3A + \cos^2 3A = 1; \quad \sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2} = 1.$$

3·3 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$; $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ எனக்காட்ட.

அதே படத்தில்

$$\sec\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\sec^2\theta = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2 + BC^2}{AC^2} = 1 + \frac{BC^2}{AC^2} = 1 + \tan^2\theta$$

$$\therefore \quad \mathbf{\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta}$$

(iii) $$\operatorname{cosec}\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\therefore \quad \operatorname{cosec}^2\theta = \frac{AB^2}{BC^2}$$

$$= \frac{AC^2 + BC^2}{BC^2}$$

$$= \frac{AC^2}{BC^2} + 1 = \cot^2\theta + 1$$

$$\therefore \quad \mathbf{cosec^2\,\theta = 1 + cot^2\,\theta}$$

பயிற்சி 7 (வாய்மொழி)

சுருக்குக :

1. $\sin^2 A + \cos^2 A$
2. $\cos^2\theta + \sin^2\theta$
3. $\cos^2 2A + \sin^2 2A$
4. $\sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2}$
5. $1 - \sin^2\theta$
6. $1 - \cos^2\theta$
7. $\sin^2 A + 1 + \cos^2 A$
8. $(\sin^2 A + \cos^2 A) \times (\sin^2 B + \cos^2 B)$
9. $\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y$
10. $1 - \sin^2 B - \cos^2 B$
11. $2\cos^2 A + 2\sin^2 A$
12. $\cos^2 A \sin^2 B + \sin^2 A \sin^2 B$
13. $\sec^2 A - 1$
14. $\operatorname{cosec}^2\theta - 1$
15. $\sec^2 A - \tan^2 A$
16. $\tan^2 B - \sec^2 B$
17. $\tan^2 A + 1 - \sec^2 A$
18. $\cot^2 A + 1 - \operatorname{cosec}^2 A$
19. $\operatorname{cosec}^2 B - \cot^2 B$
20. $(\sec^2 A - \tan^2 A) \times (\operatorname{cosec}^2 B - \cot^2 B)$

3·4 சில முற்றொருமைகள் [Certain Identities] :

மாதிரி : $\sin^6 A + \cos^6 A = 1 - 3\sin^2 A\cos^2 A$ எனக்காட்டு :

$\sin A = s$ எனவும் $\cos A = c$ எனவும் கொள்க.

$$\therefore \quad s^2 + c^2 = 1$$

$$\sin^6 A + \cos^6 A = (s^6 + c^6)$$

$$= (s^2 + c^2)^3 - 3\,s^2 c^2\,(s^2 + c^2)$$

$$= 1 - 3\,s^2 c^2 \;[\because s^2 + c^2 = 1]$$

$$= 1 - 3\sin^2 A\cos^2 A.$$

குறிப்பு: ஒரே கோணத்தின் சைன் கோசைன் விகிதங்கள் அடங்கிய முற்றொருமையை நிறுவ சைன் விகிதத்தை 's', எனவும் கோசைன் விகிதத்தை 'c' எனவும் கொள்க. அப்போது $s^2 + c^2 = 1$ என்றால் முற்றொருமையை நிறுவுவதல் அல்ஜீப்ரா கணக்காக மாறும். கடினமான கணக்குகளில் மட்டும் இவ்வாறு பிரதியிடல் நலம்.

மாதிரி 1. $(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = 1 + 2 \cos \alpha \sin \alpha$ எனக் காட்டு.

$$(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \alpha$$
$$= 1 + 2 \cos \alpha \sin \alpha \quad [\because \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1]$$

மாதிரி 2. $(\tan A + \cot A)^2 = \sec^2 A + \mathrm{cosec}^2 A$ எனக் காட்டு.

$$(\tan A + \cot A)^2 = \tan^2 A + \cot^2 A + 2 \tan A \cot A$$
$$= (\sec^2 A - 1) + (\mathrm{cosec}^2 A - 1) + 2 \tan A \times \frac{1}{\tan A}$$
$$= \sec^2 A + \mathrm{cosec}^2 A - 2 + 2$$
$$= \sec^2 A + \mathrm{cesec}^2 A$$

மாதிரி 3. $3 (\sin x - \cos x)^4 + 6 (\sin x + \cos x)^2 + 4 (\sin^6 x + \cos^6 x) = 13$ எனக் காட்டுக.

இங்கு $\sin x = s$ எனவும் $\cos x = c$ எனவும் பிரதியிட

$s^2 + c^2 = 1$ என்றால்

$3 (s-c)^4 + 6 (s+c)^2 + 4 (s^6 + c^6) = 13$
எனக் காட்ட வேண்டும்.

ஒவ்வொரு உறுப்பாக எடுப்போம்.

$$(s-c)^4 = [(s-c)^2]^2$$
$$(s-c)^2 = s^2 + c^2 - 2sc = 1 - 2sc$$
$$\therefore (s-c)^4 = (1-2sc)^2 = 1 - 4sc + 4s^2c^2$$
$$\therefore 3 (s-c)^4 = 3 - 12sc + 12s^2c^2$$

$$6 (s+c)^2 = 6 [s^2 + c^2 + 2sc]$$
$$= 6 [1 + 2sc]$$
$$= 6 + 12sc$$
$$s^6 + c^6 = (s^2+c^2)^3 - 3s^2c^2 (s^2+c^2)$$
$$= 1 - 3s^2c^2$$

$\therefore\ 4(s^6+c^6) = 4-12s^2c^2$

$\therefore\ 3(s-c)^4+6(s+c)^2+4(s^6+c^6) = 13$

$\therefore\ 3(\sin x-\cos x)^4+6(\sin x+\cos x)^2+4(\sin^6 x+\cos^6 x) = 13$

மாதிரி: $(1+\cot A-\operatorname{cosec} A)\ (1+\tan A+\sec A) = 2$ எனக் காட்டு.

$\sin A = s$ எனவும், $\cos A = c$ எனவும் பிரதியிட

இடது பக்கம் $= \left(1+\dfrac{c}{s}-\dfrac{1}{s}\right)\left(1+\dfrac{s}{c}+\dfrac{1}{c}\right)$

$$= \left(\frac{s+c-1}{s}\right)\left(\frac{c+s+1}{c}\right)$$

$$= \frac{(s+c)^2-1}{sc} = \frac{s^2+c^2+2cs-1}{sc}$$

$$= \frac{1+2sc-1}{sc} = \frac{2sc}{sc} = 2$$

பயிற்சி 8

A

(எளிய கணக்குகள்)

கீழ்க்காணும் முற்றொருமைகளை நிறுவுக:

1. $\cot A\ \sec A = \operatorname{cosec} A$
2. $\cot A\ \sin A = \cos A$
3. $\sin A\ \sec A = \tan A$
4. $\cos A \cdot \operatorname{cosec} A = \cot A$
5. $(\cos B+\sin B)^2 = 1+2\cos B\ \sin B$
6. $(\cos\theta-\sin\theta)^2 = 1-2\cos\theta\ \sin\theta$
7. $\cos^4 A-\sin^4 A = 1-2\sin^2 A$
8. $\cos^4 A+\sin^4 A = 1-2\sin^2 A\cos^2 A$
9. $\dfrac{1}{\sec^2 A}+\dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = 1$
10. $\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\sin A}-\dfrac{\cot A}{\tan A} = 1$

11. $$\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$$

12. $$(\tan\theta + \cot\theta)^2 = \sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta$$

13. $$\frac{\cos^3\theta + \sin^3\theta}{\cos\theta + \sin\theta} + \frac{\cos^3\theta - \sin^3\theta}{\cos\theta - \sin\theta} = 2$$

14. $$\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A = \sec^2 A \cdot \operatorname{cosec}^2 A$$

15. $$\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 + 3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

B

கடின கணக்குகள்

16. $$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{2}{\sin\theta} = 0$$

17. $$\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$$

18. $$3(\sin x+\cos x)^4 + 6(\sin x-\cos x)^2 + 4(\sin^6 x+\cos^6 x) = 13$$

19. $$\frac{\sec A + \tan A}{\operatorname{cosec} A + \cot A} - \frac{\sec A - \tan A}{\operatorname{cosec} A - \cot A} = 2(\sec A - \operatorname{cosec} A)$$

20. $$\frac{1+\cos A-\sin A}{1+\sin A+\cos A} + \frac{1+\sin A+\cos A}{1+\cos A-\sin A} = 2\sec A$$

21. $$\frac{2\cos A\ \sin A + \cos A}{1 + \sin A + \sin^2 A - \cos^4 A} = \cot A$$

22. $$\cos A(1-\cot A) - \sin A(1-\tan A) = \sec A - \operatorname{cosec} A$$

23. $$(1+\tan x+\sec x)(1+\tan x-\sec x) = 2\tan x$$

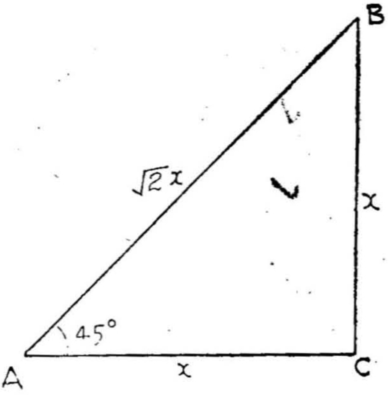
24. $$\sec^6 A - \tan^6 A = 1 + 3\sec^2 A\tan^2 A$$

25. $$(\sec A - \tan A - 1)(\sec A + \tan A + 1) + 2\tan A = 0$$

45° இன் கோண விகிதங்கள் :

ABC என்ற முக்கோணத்தில் $\angle A = 45°$ $\angle C = 90°$ ஆகுக.

$\therefore$ $\angle B = 45°$ $\therefore$ ABC இரு சமபக்க முக்கோணமாகும்.



$AC = x$ என்றால் $BC = x$

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2x^2$

$AB = \sqrt{2x}$

$$\therefore \sin 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

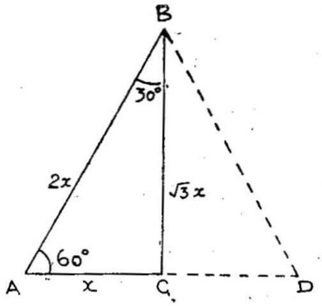
$$\cos 45° = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ton } 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{x} = 1$$

60°, 30° கோணங்களின் விகிதங்கள் : ABC என்ற முக்கோணத்தில் $\angle C = 90°$ $\angle A = 60°$ ஆகுக.

$\therefore$ $\angle B = 30°$; ACஐ Dக்கு CD = AC எனும்படிக்கு நீட்டு. BDஐச் சேர். ABC, DBC எனும் முக்கோணங்களில் AC = CD, BC பொது, ACB = DCB = 90° $\triangle ACB \equiv \triangle DCB$

$\therefore$ $\angle CDB = \angle CAB = 60°$



$\therefore$ ABD ஒரு சமபக்க முக்கோணம்

AB = BD = AD = 2AC

$AC = x$ என்றால் $AB = 2x$; $\therefore BC^2 = AB^2 - BC^2$

$$= 4x^2 - x^2$$
$$= 3x^2$$
$$BC = \sqrt{3}\,x$$

$$\therefore AB : BC : CA = 2 : \sqrt{3} : 1$$

$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{BC}{AC} = \sqrt{3}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

[குறிப்பு: 60°, 30° கோணங்களின் விகிதங்களை எழுத $1 : \sqrt{3} : 2$ என்ற விகிதத்தில் உள்ள செங்கோணமுக்கோணத் துணைப்படம் வரைந்துகொள்ளவும்].

பயிற்சி 9

மதிப்பைக் காண்க:

1. $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30 \sin 60^\circ$
2. $\sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ$
3. $\sin^2 30^\circ + \sin^2 60 + \tan^2 45^\circ$
4. $\tan^2 30^\circ + 2\sin^2 45^\circ + \frac{1}{3}\sin^2 60^\circ$
5. $\sin 60^\circ \tan^2 60^\circ \tan 30^\circ$
6. $\frac{1}{3}\cos^2 30^\circ - \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 30^\circ \tan^2 30^\circ + \frac{4}{3}\cos^2 45^\circ \cot^2 30^\circ$
7. $\sec^2 30^\circ + 2\operatorname{cosec}^2 45^\circ - 4\tan^2 30^\circ$

8. $2\tan^2 60° - \frac{3}{2}\tan^2 30° \sec 60° + \frac{3}{2}\cos^2 30°$

9. $\tan^2 30° + 2\sin 60° + \tan 45° - \tan 60° + \cos^2 30$

10. $4\cot^2 30° + 9\sin^2 60° - 6\ \text{ccsec}^2 60° - \frac{9}{4}\tan^2 30.$

3·5 சைன், கோசைன், டான்ஜண்டு மதிப்புப் பட்டியல்கள்: கோண விகிதங்களின் மதிப்புக்கள், பட்டியல்களில் தரப்படுகிறது. 0° டிகிரியிலிருந்து 90° முடிய 1 மினிட் வேறுபாட்டில் உள்ள, ஒவ்வொரு கோணத்திற்கும் கோணவிகித மதிப்புக்களை இப் பட்டியல்களிலிருந்து கண்டறியலாம். பட்டியலின் விவரத்தையும், அதைப் பயன்படுத்தும் முறையையும் கீழே தருகின்றோம்.

பட்டியல் விளக்கம்

1. முதல் பத்தியில் 0°, 1° என ... 89° வரை ஒன்றன்கீழ் ஒன்ருகக் காணப்படும். இவ்வாறு பட்டியலில் 90 வரிகள் உள்ளன.

2. முதல் பத்தியை அடுத்துள்ள பத்து பத்திகளின் (columns) தலைப்பில் 0′, 6′, 12′, 18′, 24′, 30′, 36′, 42′, 48′, 54′ எனக் காணலாம். ஒவ்வொரு தலைப்பின்கீழும் ஒவ்வொரு வரியிலும் மதிப்புக்கள் 4 சிற்றிலக்கங்களாகக் காணப்படுகின்றன. 2958 எனக் காணப்பட்டால் ·2958 எனப் பொருளாகும். கோணங்களின் சைன், கோசைன் விகிதங்களும், 45°க்குக் குறைவான கோணங்களின் டான்ஜண்டு விகிதங்களும் இவ்வாறு 4 தசமத்தானத் திருத்தமாகப் பின்னங்களில் தரப்படுகின்றன.

3. இவ்வாறு 6 மினிட் ($\frac{1}{10}$ டிகிரி) வேறுபாட்டில் (Difference of 6′) உள்ள கோணங்களின் கோண விகிதங்களைப் பட்டியலிலிருந்து நேரே எழுதலாம்.

மாதிரி 1: sin 18° 18′இன் மதிப்பைப் பட்டியலிலிருந்து எழுது.

(i) சைன் விகிதப் பட்டியலை எடுத்துக்கொள்.

(ii) 18° எனத் தொடங்கும் வரியில் 18′ என்ற தலைப்பின்கீழ் உள்ள சிற்றிலக்கங்களைப் பார். 3140 எனக் காண்கிறது.

(iii) ஆகவே sin 18° 18′ = ·3140.

மாதிரி 2: tan 63° 30′ இன் மதிப்பு என்ன?

(i) டான்ஜண்டு விகிதப் பட்டியலை எடுத்துக்கொள்.

(ii) 63° என்று தொடங்கும் வரியில் 30′ என்ற தலைப்பின்கீழ் உள்ள எண்களைப் பார். அவைகள் மேலே கோடு இருப்பதால் முழுஎண் பாகம் 1க்குமேல் 1 அதாவது 2. பின்னபாகம் ·0057.

(iii) ∴ tan 63° 30′ = 2·0057

பயிற்சி 10

நான்கு இலக்கக் கோணப் பட்டியலிலிருந்து மதிப்பு எழுதுக.

(1) sin 24° 36′	(2) sin 68° 42′	(3) tan 42° 18′
(4) tan 63° 42′	(5) cos 2° 18′	(6) cos 82° 12′
(7) cos 40° 6′	(8) cos 57° 48′	(9) tan 72° 36′

1 மினிட் $\left(\frac{1}{60}^\circ\right)$ வேறுபாட்டில் கோண விகிதம் காண:

மாதிரி: sin 18° 22′ இன் மதிப்பைக் காண்க.

பட்டியலில் sin 18° 18′ இன் மதிப்பு ·3140 எனக் காண்கிறோம்.

இன்னும் 4′ அதிகத்திற்கு, அடுத்த ஐந்து பத்தியில் 4′க்கீழ் உள்ள 11ஐ இத்துடன் கூட்டவும்.

∴ sin 18° 22′ = ·3151.

மாதிரி: cos 38° 41 இன் மதிப்பு என்ன?

cos 38° 36′ = 0 · 7815

அதிக 5′க்கு = 9 இதைக் கழிக்க வேண்டும்.

ஏனெனில் கோணம் அதிகரிக்கும்போது கோசைன் விகிதம் குறைகிறது.

∴ cos 38° 41ன் மதிப்பு = 0 · 7806.

பயிற்சி 11

மதிப்புக் காண்க:

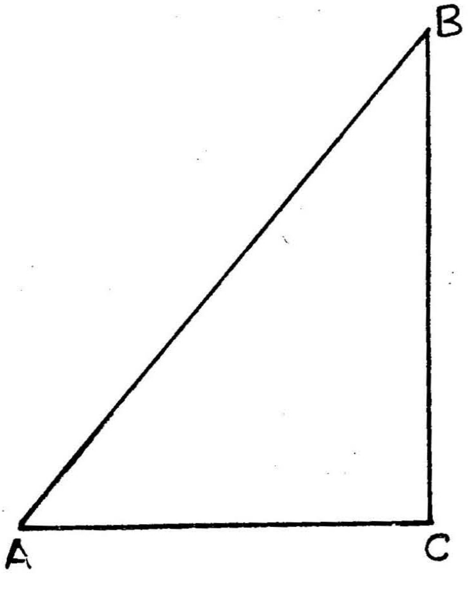
(1) sin 5° 10′	(2) cos 84° 50′	(3) sin 45° 32′
(4) cos 54° 28′	(5) sin 72° 20′	(6) cos 17° 40′
(7) tan 44° 27′	(8) tan 32° 27′	(9) tan 78° 41′

பயிற்சி 12

பட்டியலைப் பயன்படுத்திக் கோணத்தை மினிட் திருத்தமாகக் காண்க.

1. $\sin A = \cdot 8988$
2. $\sin x = \cdot 9755$
3. $\cos B = \cdot 2588$
4. $\cos A = \cdot 6361$
5. $\tan \theta = \cdot 4663$
6. $\tan B = 1 \cdot 6643$
7. $\tan x = 3 \cdot 0061$
8. $\sin \theta = \cdot 5637$
9. $\cos A = \cdot 8592$
10. $\cos \theta = \cdot 3728$.

நிரப்பு கோணங்களும் அவைகளின் கோண விகிதங்களும்.



ABC என்ற முக்கோணத்தில் $\angle C = 90°$ $\therefore$ $\angle A + \angle B = 90°$ $\angle A$யின் நிரப்பு கோணம் $\angle B$ ஆகும். $\angle B$யின் நிரப்பு கோணம் $\angle A$ ஆகும். அதாவது $\angle B = 90 - A$:

A, B இவற்றுள் ஒன்று மற்றதன் நிரப்பு கோணம்.

கோண விகிதங்கள். படத்திலிருந்து

$$\cos A = \frac{AC}{AB} \qquad \sin B = \frac{AC}{AB}$$

$$\therefore \quad \cos A = \sin B$$

சைன் (கோணம்) = கோசைன் (நிரப்பு கோணம்)
கோசைன் (கோணம்) = சைன் (நிரப்பு கோணம்).

$$\tan B = \frac{AC}{BC} = \cot A$$

∴ டான்ஜண்டு (கோணம்)

= கோடான்ஜண்டு (நிரப்பு கோணம்).

இவ்வாறு எடுத்துக்காட்டாக

$\sin 52° = \cos 38°$; $\sin 38° = \cos 52°$

$\sec 62° = \operatorname{cosec} 28°$; $\tan 36° = \cot 54°$

என ஆகும்.

பயிற்சி (வாய்மொழி) 13

நிரப்பு கோணங்களின் கோண விகிதங்களாகக் கூறுக.

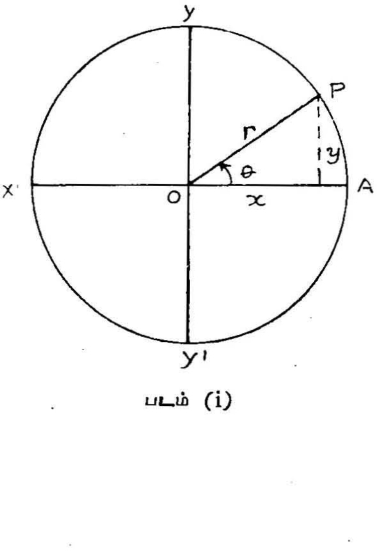
1. $\cos 30°$	2. $\sin 60°$	3. $\tan 30°$
4. $\sin 70°$	5. $\sin 45°$	6. $\tan 70°$
7. $\sec 30°$	8. $\cot 40°$	9. $\cot 72°$
10. $\tan 37°$	11. $\cos 15°$	12. $\cos 22° 18'$
13. $\sin 34° 36'$	14. $\tan 28° 42'$	15. $\sec 36° 18'$

4. கோண விகிதம் — பொது விளக்கம்

(Trigonometrical ratio — General definition)

இதுவரை குறுங் கோணங்களின் கோண விகிதங்கள் என்ன என்பதைப்பற்றிக் கூறினோம். ஆனால், கோணங்களின் அளவு 90°க்கு மேலேயும் இருக்கலாம் எனக் கண்டோம். ஆகவே, கோணம் எத்தகையதாயினும், கோணவிகிதம் என்ன என்பதை விளக்குவோம்.

4·1 பொது விளக்கம். OP எனும் கோடு OA எனும் கோட்டுடன் பொருந்தியிருந்து, பிறகு 'O' எனும் கோண அளவுக்குச் சுற்றட்டும். OAஐ x அச்சாகக் கொள்க. OAக்குக் குத்தாகவுள்ள Y'OYஐ y அச்சாகக் கொள்க.



படம் (i)

Pயின் உறுப்பு (x, y) ஆகுக.

OPயின் நீளம் r ஆகுக.

அப்போது 'θ' எனும் கோணத்தின்

சைன் விகிதம் $= \dfrac{y}{r}$

கோசைன் விகிதம் $= \dfrac{x}{r}$

அதாவது $\boxed{\sin \theta = \dfrac{y}{r}; \quad \cos \theta = \dfrac{x}{r}}$

மற்ற விகிதங்களை இவ்விரண்டு விகிதங்களைக் கொண்டு விளக்குவோம்.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

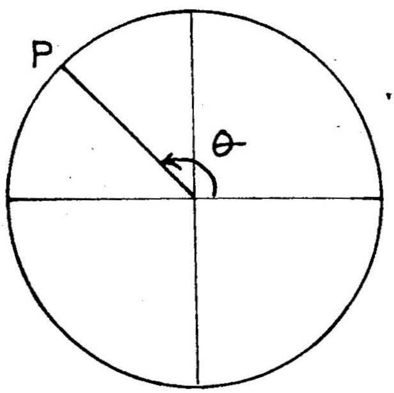
$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{y/r}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{x/r}$$

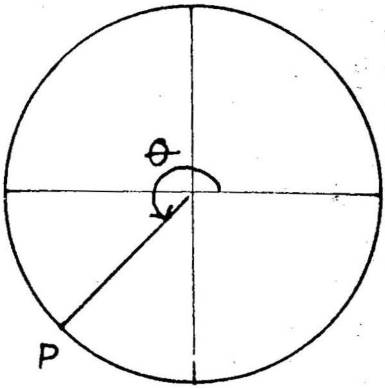
$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{y/x}$$

குறிப்பு 1 : படம் (1)இலிருந்து குறுங்கோணத்தின் கோண விகித விளக்கம் இந்தப் பொது விளக்கத்தில் அடங்கி யுள்ளதைக் காணலாம். θ எனும் கோணம் $90°$க்குக் குறைவானால் Pயின் y உறுப்பு 'θ' எனும் கோணத்தின் எதிர்ப்பக்கமாகவும், x உறுப்பு, அடுத்த பக்கமாகவும் R = OP கர்ணமாகவும் அமைவதைக் காண்க.

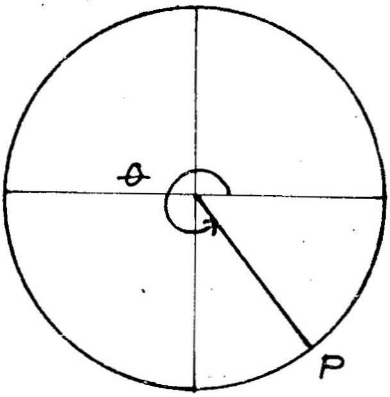
குறிப்பு 2 : OP மற்ற மூன்று பிரிவுகளில் அமையும்போது, கோண விகிதங்கள் எத்தகையன என்பதைப் படங்கள் (ii) (iii) (iv) காட்டுகின்றன.



படம் (ii)



படம் (iii)



படம் (iv)

குறிப்பு 3 : எல்லாப் படங்களிலிருந்தும் நாம் அறிவது, கோணம் எத்தகையதாயினும் Pயின் (x, y) உறுப்புக்கள் OPஐவிட. (rஐவிட) அதிகமல்ல என்பதாம். ஆகவே, கோணம் எத்தகைய தாயினும், அதன் சைன், கோசைன் விகிதங்கள் மதிப்பில் 1ஐவிட அதிகமாகாது.

குறிப்பு 4 : எல்லாப் படங்களிலிருந்தும் நாம் அறிவது

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\therefore \quad \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

குறுங் கோணத்திற்கு இத்தகைய முற்றொருமையைக் கண்டோம். இங்கே கோணம் எத்தகையதாயினும் முற்றொருமை பொருந்தும் என்பதைக் காண்கிறோம்.

இரு புறத்தையும் $\cos^2\theta$ ஆல் வகுக்க

$$1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\therefore \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

இரு புறங்களையும் $\sin^2\theta$ ஆல் வகுக்க

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + 1 = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\therefore \quad \cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta$$

குறிப்பு 5: 'x', 'y' அச்சு தூரங்களையும் 'r'ஐயும் நாம் எந்த அலகால் வேண்டுமாயினும் அளக்கலாம். கோண விகிதங்கள் விகிதமாதலினால், அவற்றின் மதிப்புத் தூரங்களை அளக்கும் அலகுகளைப் பொறுத்தது அன்று. 'OP'ஐ அலகாகக் கொண்டால் $r = 1$ என ஆகிறது.

* அப்போது $\sin\theta = y$ $\cos\theta = x$ என ஆகிறது.

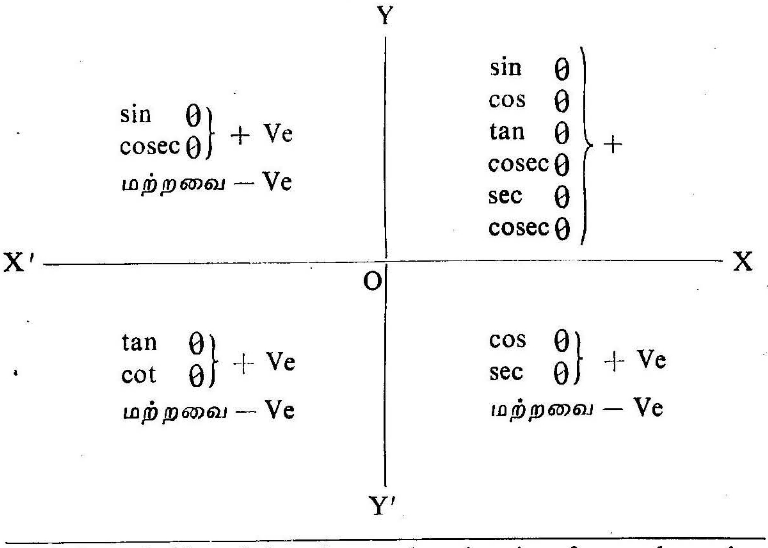
கோணம் மாறும்போது, அதன் கோண விகிதங்கள் எவ்வாறு மாறுகின்றன என்பதைக் காண இதைப் பயன்படுத்துவோம்.

4·2 கோணவிகிதங்களின் குறிகள்.
(Signs of Trigonometric ratios).

கோண விகிதங்களின் பொது விளக்கத்திலிருந்து, காண்பது.

ஒரு கோணத்தின் சைன் விகிதம் Pயின் y உறுப்பு. நேரெண்ணாகுமிடத்து நேரெண்ணாகவும், அது எதிரெண்ணாகுமிடத்து, எதிரெண்ணாகவும் இருக்கும் எனத் தெரிகிறது.

இதே போலக் கோசைன் விகிதம், x உறுப்பின் குறியைப் பொறுத்தது. இவற்றைப் படத்தால் விளக்குவோம்.



*The Defenition of sine of an angle and cosine of an angle as given by Bhaskara in his 'Gola Dipika' is as follows: 'sine' is distance from East West line.

Cosine is distance from North South line. Here y is distance from East West line; x is distance from North South line."

குறிப்பு: கோண விகிதத்தின் குறியை நிச்சயிக்க

(i) சுற்றும் எந்தப் பிரிவில் அமைகிறதெனப் பார்.

(ii) அங்கு y உறுப்பு $\pm$ ஆனல் சைன் $\pm$ ஆகும்.
x உறுப்பு $\pm$ ஆனல் கோசைன் $\pm$ ஆகும்.

இதனல் விகிதங்களின் குறி முடிவு செய்யப்படும்.

பயிற்சி 15

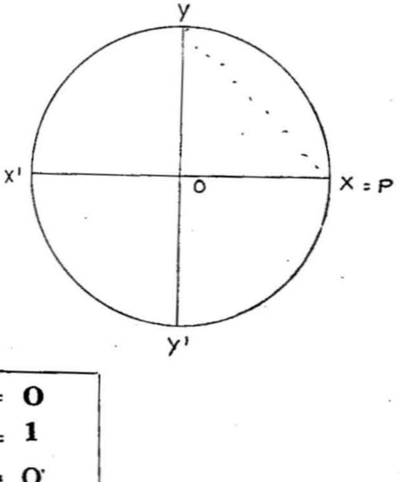
(வாய்மொழி)

கீழ் வரும் கோண விகிதங்களின் குறி என்ன எனக் கூறுக.

1. $\sin 120^\circ$ 2. $\cos 110^\circ$ 3. $\tan 160^\circ$
4. $\operatorname{cosec} 140^\circ$ 5. $\sec 210^\circ$ 6. $\tan 280^\circ$
7. $\sin 240^\circ$ 8. $\sin 300^\circ$ 9. $\cos 320^\circ$
10. $\sin 280^\circ$ 11. $\sin -330^\circ$ 12. $\cos -210^\circ$
13. $\tan \frac{\pi}{3}$ 14. $\cos \frac{2\pi}{3}$ 15. $\sin \frac{5\pi}{4}$
16. $\sec \frac{7\pi}{4}$ 17. $\cos -\frac{3\pi}{4}$ 18. $\cos -\frac{7\pi}{3}$
19. $\sin -\frac{9\pi}{5}$ 20. $\tan -\frac{5\pi}{3}$

4·3 O° இன் கோண விகிதங்கள்: X′ OX × Y′ OY என்பன ஒன்றற்கொன்று குத்தாகவுள்ள இரு கோடுகள்.

OP எனும் ஆரம், OX இலிருந்து புறப்பட்டுச் சுழல்கிறது. OP யின் நீளம் 1 ஆகுக. கோணம் O°, என்றல் OP OX உடன் பொருந்துகிறது. P யின் உறுப்புக்கள் (1, O)



$$\therefore \sin O^\circ = \frac{y}{OP} = O$$

$$\cos O^\circ = \frac{x}{OP} = 1$$

$$\therefore \sin O^\circ = O$$
$$\cos O^\circ = 1$$
$$\therefore \tan O^\circ = O$$

4·4 90° (அல்லது $\frac{\pi}{2}$ ரேடியன்)இன் கோண விகிதம்.

OP எனும் சுற்று ஆரம், கால் வட்டம் சுழல 90° அல்லது $\frac{\pi}{2}$ ரேடியன் கோணம் ஏற்படுகிறது. $\angle XOP = 90°$; Pயின் உறுப்புக்கள் இப்போது $(0, 1)$. ஆகவே கோண விகிதங்களின் பொது விளக்கத்தின்படி

$$\sin 90° = \frac{\text{Pயின் } y \text{ உறுப்பு}}{OP} = 1$$

$$\cos 90° = \frac{\text{Pயின் } x \text{ உறுப்பு}}{OP} = 0$$

குறிப்பு 1 . tan 90° : OP எனும் ஆரம் y அச்சை நெருங்கட்டும். $\tan XOP = \frac{y}{x}$, OPஅச்சை நெருங்கும்போது $\angle XOP$ கோணம் 90°ஐ அணுகுகிறது. y அதிகரிக்கிறது. அதாவது 1ஐ அணுகுகிறது; xஇன் அளவு 0ஐ நெருங்குகிறது. ஆகவே $\frac{y}{x}$ மிக அதிகமாகிறது. கணித மொழியில் θ எனும் கோணம் 90°ஐ அணுகும்போது tan θஇன் மதிப்பு "அலகிலா மதிப்பு" ஆகிறது. (tan θ tends to infinity) என்கிறோம். குறியீட்டில் $\tan \theta \underset{\theta \to 90°}{\longrightarrow} \infty$ எனக் காட்டப்படுகிறது. சாதாரணமாகக் கூறும்போது $\tan 90° = \infty$ என்கிறோம்.

குறிப்பு 2 : $\sin \theta = \frac{y}{OP}$ $\cos \theta = \frac{x}{OP}$. ஆகவே θ எனும் கோணம் 90°க்கு 0விலிருந்து அதிகமாகும்போது sin θஇன் மதிப்பு 0விலிருந்து 1க்கு அதிகரிக்கிறது.

4·4 180°இன் (π ரேடியனின்) கோண விகிதம் :

OP அரைவட்டம் சுற்றினல் (OXவிருந்து) OX′ உடன் பொருந்துகிறது.

Pயின் உறுப்புக்கள் $(-1, 0)$

$\angle XOP = 180°$

ஆகவே $\sin 180° = \frac{Y}{OP} = 0$

$$\therefore \cos 180^\circ = \frac{X}{OP} = -1$$

$$\therefore \tan 180^\circ = \frac{Y}{X} = 0$$

4·5 $(180-\theta)$ன் அல்லது $(\pi-\theta)$இன் கோண விகிதங்கள்

X'OX, Y'OY இருகுத்து அச்சுக்கோடுகள் OP எனும் ஆரம் OXலிருந்து சுழல்கிறது.

OP_1 என்ற நிலையில் $\angle XOP_1 = \theta$ ஆகுக.

OP_2 என்ற நிலையில் $\angle XOP_2 = 180-\theta$ ஆகுக.

P_1இலிருந்து X அச்சுக்கு $P_1 M_1$ குத்துக்கோடு ஆகுக.

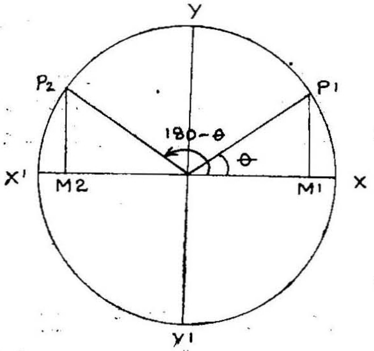
P_2லிருந்து X அச்சுக்கு $P_2 M_2$ குத்துக்கோடு ஆகுக.

OPஐ அலகாகக்கொண்டு உறுப்புக்களை அளக்கவும்.

P_1இன் உறுப்புக்கள் (X_1, Y_1);

P_2இன் உறுப்புக்கள் (X_2, Y_2) ஆகுக.

(OP = 1 எனக் கொண்டுள்ளோம்)



பொது விளக்கப்படி

$$Y_1 = \sin\theta \qquad Y_2 = \sin(180-\theta)$$

$$X_1 = \cos\theta \qquad X_2 = \cos(180-\theta)$$

ஆனால் $\triangle OM_1P_1 \equiv \triangle OM_2P_2$ $\left\{ \begin{array}{l} \because OP_1 = OP_2 \\ M_1OP_1 = M_2OP_2 = \theta \\ P_1M_1O = P_2M_2O = 90^\circ \end{array} \right.$

$$\therefore M_2P_2 = M_1P_1 \qquad OM_2 = OM_1$$

$$Y_2 = Y_1 \qquad X_2 = -X_1$$

$$\therefore \sin(180-\theta) = \sin\theta, \quad \cos(180-\theta) = -\cos\theta$$

$$\tan \overline{180-\theta} = \frac{\sin \overline{180-\theta}}{\cos \overline{180-\theta}} = \frac{\sin \theta}{-\cos \theta} = -\tan \theta$$

$$\therefore \quad \tan(180-\theta) = -\tan\theta$$

டிகிரி அளவையில்	ரேடியன் அளவையில்
$\sin(180-\theta) = \sin\theta$ *	$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$
$\cos(180-\theta) = -\cos\theta$	$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$
$\tan(180-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$
$\text{cosec}(180-\theta) = \text{cosec}\,\theta$ *	$\text{cosec}(\pi-\theta) = \text{cosec}\,\theta$
$\sec(180-\theta) = -\sec\theta$	$\sec(\pi-\theta) = -\sec\theta$
$\cot(180-\theta) = -\cot\theta$	$\cot(\pi-\theta) = -\cot\theta$

குறிப்பு: மேற்கூறிய தொடர்புகள் மிக முக்கியமானவை. ஏனெனில் θ குறுங்கோணமானால் $(180-\theta)$ விரிகோணமாகும். இரண்டு கோணங்களும், ஒன்றற்கொன்று மிகைநிரப்பு கோணங்களாகும்.

ஒரு விரிகோணத்தின் (obtuse angle) கோண **விகிதம் காண,** அதன் மிகைநிரப்புக் கோணத்தின், அதே விகிதத்தின் மதிப்பைப் பட்டியலிலிருந்து எழுதவும். கோண விகிதம் நேரெண்ணு அல்லது எதிரெண்ணு (negative) என்பதும் தெரியும். ஆகவே, சரியான மதிப்பை எழுத முடியும்.

உதாரணம்: கீழ்வரும் கோண விகிதங்களைக் காண்க.

(i) $\sin 135^\circ$ (ii) $\cos 150^\circ$ (iii) $\tan 120^\circ$

(iv) $\cos 138^\circ 24'$ (v) $\sin 152^\circ 36'$.

(i) 135இன் மிகைநிரப்பு கோணம் 45° சைன் விகிதம் நேரெண்ணுகும்.

$$\therefore \quad \sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(ii) \quad \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(iii) \quad \tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$(iv) \quad \cos 138^\circ 24' = -\cos 41^\circ 36'$$

$$(v) \quad \sin 152^\circ 36' = \sin 27^\circ 24'$$

பயிற்சி 16

மதிப்புக் காண்க.

(i) sin 150°	(ii) cos 150°	(iii) tan 120°
(iv) sin 140°	(v) tan 100°	(vi) cos 163° 18′
(vii) sin 130° 24′	(viii) cos 124°	(ix) sec 120°
(x) cosec 150°	(xi) cot 135°	(xii) sec 150°

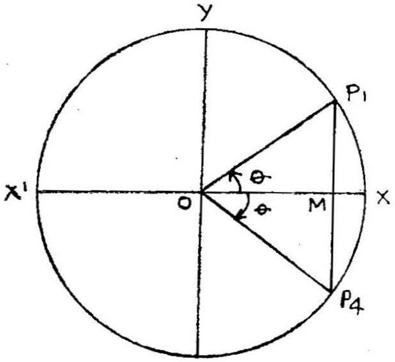
4·6 — θஇன் கோண விகிதங்கள்.

X′OX, Y′OY அச்சுக்கோடுகள் OP எனும் சுற்று ஆரம் x அச்சுடன் பொருந்தும்போது

(i) Pயின் நிலை A ஆகுக ;

(ii) θ எனும் கோணம் ஏற்படும்போது OP_1 ஆகுக ;

(iii) எதிர்த்திசையில், அதாவது வலமாக $\theta°$ சுழன்று நிற்கும் போது OP_4 ஆகுக.



Y_1

$\therefore \quad \angle XOP_1 = \theta \qquad \angle XOP_4 = -\theta$

$P_1\ (x_1,\ y_1)$; $P_4\ (x_4,\ y_4)$ ஆகுக.

$P_1\ P_4$ xஅச்சை Mஇல் வெட்டட்டும்.

$OP_1 = OP_4$; $OM = OM$ $\angle MOP_1 = \angle MOP_4 = \theta$

$\therefore \quad \triangle MOP_1 \equiv \triangle MOP_4$

$\therefore \quad \angle OMP_1 = \angle OMP_4 = 90°$

$MP_1 = -MP_4$ (அளவிலும், ராசியிலும்)

$\therefore \quad y_1 = -y_4 \qquad y_4 = -y_1$

$\therefore \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta$

இத்துடன் $x_4 = OM = x_1$ $\therefore \cos(\theta) = \cos\theta$

$\therefore \tan(-\theta) = -\tan\theta$

[$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$; $\sec(-\theta) = \sec\theta$; cos $(-\theta) = -\cot\theta$ எனவும் வருகிறது.]

பயிற்சி 17

மதிப்பை எழுதுக.

1. $\sin(-30°)$ 2. $\cos(-45°)$ 3. $\tan -\frac{2\pi}{3}$

4. $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 5. $\sin(-60°)$ 6. $\sin(-32°)$

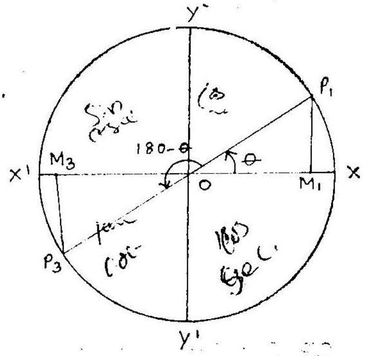
7. $\cot(-18°28')$ 8. $\tan(28°42')$ 9. $\sin(-135°)$

10. $\cos(-150°)$ 11. $\tan(-120°)$ 12. $\operatorname{cosec}(-60°)$

13. $\sec(-120°)$ 14. $\cot(-120°)$ 15. $\cot(-150°)$

4·7 $180° + \theta$இன் [அல்லது $(\pi + \theta)$இன்] கோண விகிதங்கள்.

X'OX, Y'OY என்பவை முறையே, x, y அச்சுக்கள். OP எனும் சுற்று ஆரம் OX வுடன் பொருந்தியிருந்து, $\theta°$ கோண அளவுக்குச் சுழன்று OP_1ல் நிற்கிறது.



$\angle XOP_1 = \theta$; $P_1(x_1\ y_1)$ ஆகுக. ஆரம் இன்னும் 180° (அல்லது π ரேடியன்) சுழன்று OP_3 எனும் நிலையில் நிற்கட்டும்.

$\therefore$ பின்வளை கோணம் $XOP_3 = 180° + \theta$; $P_3(x_3, y_3)$ ஆகுக.

x அச்சுக்கு P_1M_1, P_3M_3 எனும் குத்துக் கோடுகள் வரைக.

$\triangle M_3OP_3 \equiv \triangle M_1OP_1$ (படத்திலிருந்து எளிதில் தெரிகிறது)

$M_3P_3 = M_1P_1 \qquad OM_3 = OM_1$

$\therefore y_3 = -y_1 \qquad x_3 = -x_1$

$\therefore \sin(180+\theta) = -\sin\theta$; $\cos(180+\theta) = -\cos\theta$

$$\tan(180+\theta) = \frac{\sin(180+\theta)}{\cos(180+\theta)} = \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = \tan\theta$$

டிகிரி அளவை	ரேடியன் அளவை
$\sin(180+\theta) = -\sin\theta$	$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$
$\cos(180+\theta) = -\cos\theta$	$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$
$\tan(180+\theta) = \tan\theta$	$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$

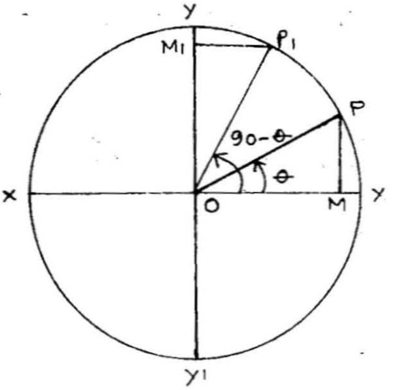
4·8 $90° - \theta$ [அல்லது $\frac{\pi}{2} - \theta$ ரேடியனின்] கோண விகிதங்கள். $X'OX$, $Y'OY$ இவை x, y, அச்சுக்கள். OP எனும் சுற்றும் ஆரம், x அச்சுடன் θ கோணம் ஏற்படுத்துகிறது.

அதாவது $\angle XOP = \theta$

OP' என்ற நிலையில் $\angle YOP' = \theta$ ஆகுக.

$\therefore \quad XOP' = 90\ \theta$.

$P(x, y)$, $P'(x', y')$ ஆகுக.



OP யின் நீளம் 1 எனக் கொள்வோம். P யிலிருந்து x அச்சுக்கு PM எனும் குத்துக்கோடும், Pயிலிருந்து y அச்சுக்கு $P'M'$ எனும் குத்துக்கோடும் வரைக.

$\triangle OM'P' = \triangle OMP$ எனத் தெரிகிறது.

$OM' = OM \qquad M'P' = MP$

$y' = x \qquad x' = y$

$\therefore \quad \sin(90° - \theta) = \cos\theta \qquad \cos(90° - \theta) = \sin\theta$

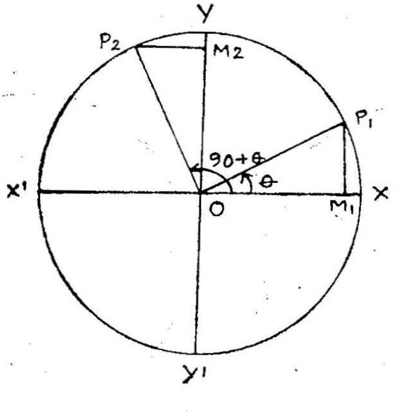
$$\therefore \quad \tan(90 - \theta) = \frac{\sin\overline{90 - \theta}}{\cos\overline{90 - \theta}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

டிகிரி அளவையில்	ரேடியனில்
$\sin(90-\theta) = \cos\theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$
$\cos(90-\theta) = \sin\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$
$\tan(90-\theta) = \cot\theta$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta$
$\operatorname{cosec}(90-\theta) = \sec\theta$	$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sec\theta$
$\sec(90-\theta) = \operatorname{cosec}\theta$	$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \operatorname{cosec}\theta$
$\cot(90-\theta) = \tan\theta$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \tan\theta$

[**குறிப்பு :** θ குறுங்கோணமானால், மேற்கூறிய தொடர்புகளைச் செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து முன்பே அடைந்துள்ளோம்].

4·9 $(90+\theta)$ இன் $\left[\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right.$ இன் $\left.\right]$ கோணவிகிதங்கள் :

X'OX, Y'OY முறையே x, y அச்சுக்கள், சுற்றும் ஆரம் OP, x அச்சுடன் OP_1 என்ற நிலையில் 'θ' எனும் கோணம் ஏற்படுத்துகிறது. OP_2 என்ற நிலையில் $\angle XOP_2 = 90 + \theta$ எனும் கோணம் ஏற்படுத்துகிறது. அதாவது $YOP_2 = \theta$ ஆகிறது. $P_1(x_1, y_1)$; $P_2(x_2\ y_2)$ ஆகுக.



OP = 1 ; என ஆகுக.

[அதாவது நீளத்தை அளக்க OP ஐ அலகாகக் கொண்டுள்ளோம் என்பதாம்].

P_1M_1 x அச்சுக்குக் குத்தாகுக.

P_2M_2, y அச்சுக்குக் குத்தாகுக.

$\therefore \quad \triangle OM_2P_2 \equiv \triangle OM_1P_1$

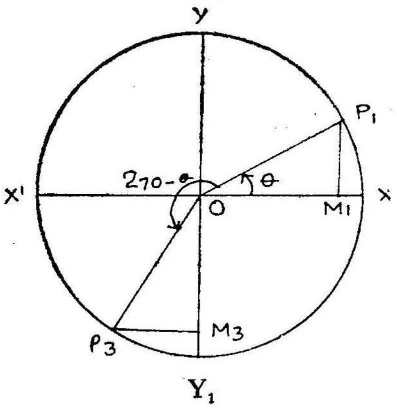
$\therefore \quad y_2 = x_1 \quad x_2 = -x_1$

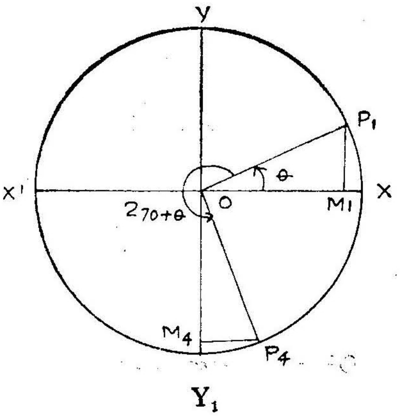
$\sin(90+\theta) = \cos\theta \qquad \cos(90+\theta) = -\sin\theta$

$$\therefore \quad \tan(90+\theta) = \frac{\sin(90+\theta)}{\cos(90+\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

$\therefore \sin(90+\theta) = \cos\theta$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$
$\cos(90+\theta) = -\sin\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$
$\tan(90+\theta) = -\cot\theta$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\cot\theta$
$\mathrm{cosec}(90+\theta) = \sec\theta$	$\mathrm{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sec\theta$
$\sec(90+\theta) = -\mathrm{cosec}\,\theta$	$\sec\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\mathrm{cosec}\,\theta$
$\cot(90+\theta) = -\tan\theta$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\tan\theta$

4·10 $(270-\theta)$; $(270+\theta)$இன் கோண விகிதங்கள்:





இரண்டிலும் $\angle XOP_1 = O$. $P_1 (x_1 y_1)$ ஆகுக. $P_1 M_1 \perp OX$; $P_3 M_3 \perp OY'$ $P_4 M_4 \perp OY'$ படத்திலிருந்து எளிதில் அறிவது.

$$OM_3 = OM_1 \qquad OM_4 = OM_1$$
$$y_3 = -x_1 \qquad y_4 = -x_1$$
$$\sin (270 - \theta) = -\cos \theta \qquad \sin (270 + \theta) = -\cos \theta$$
$$M_3 P_3 = M_1 P_1 \qquad M_4 P_4 = M_1 P_1$$
$$x_3 = -y_1 \qquad x_4 = y_1$$
$$\therefore \cos (270 - \theta) = -\sin \theta \qquad \cos (270 + \theta) = \sin \theta$$
$$\therefore \tan (270 - \theta) = \cot \theta \qquad \tan (270 + \theta) = -\cot \theta$$

4·11 **குறிப்பு:** கோண விகித விளக்கத்திலிருந்து நாம் அறிவது, கோணம் எத்தகைய அளவாயினும், சுற்று ஆரம் 4 பிரிவுகளில் (Four quadrants) ஒரு பிரிவில் அமையவேண்டும்.

அந்த நிலையிலிருந்து, முழுச்சுற்றுக்களாக எத்தனை சுற்றுக்கள் இடமாகவோ வலமாகவோ சுற்றினாலும் அதே நிலைக்கு வந்து சேரும்.

ஆதலால் கோணத்தின் மதிப்பு முழு வட்டங்களாக அதிகமாகவோ, குறையவோ செய்தால், கோண விகிதங்களின் மதிப்பு மாறுபடாது. இதைக் கணிதக் குறியீட்டில்

$$\sin \theta = \sin (n\, 360^\circ + \theta)$$
$$\cos \theta = \cos (n\, 360^\circ + \theta)$$
$$\tan \theta = \tan (n\, 360^\circ + \theta)$$

எனக் கூறுகிறோம். [n நேர் அல்லது எதிர் முழு எண்ணாகும்]

ரேடியன் அளவையில்

$$\sin \theta = \sin (2n\pi + \theta)$$
$$\cos \theta = \cos (2n\pi + \theta)$$
$$\tan \theta = \tan (2n\pi + \theta)$$

இவ்வாறாகக் கோணம், ஒவ்வொரு 360° அதிகமாகும் போதும், கோண விகிதம் மறுபடியும் மறுபடியும் அதே மதிப்பை அடைவதால் கோண விகிதங்கள் ‘திரும்பத் திரும்ப’ மதிப்படையும் சார்பலன்கள் (Periodic functions) எனப்படும்.

4·12 **குறிப்பு :** கோணம் எந்த மதிப்பாயினும் அதன் கோண விகிதத்தைக் குறுங்கோணங்களுக்குரிய கோணவிகிதப் பட்டியல் களிலிருந்து காணலாம். இதற்கு இதுவரை கண்ட தொடர்புகள் பயன்படுகின்றன. அவற்றை நினைவுகூர ஒரு வழி கீழே கூறுவோம்.

1. கோணம் தரப்பட்டால், சுற்று ஆரம் எவ்வாறு சுற்றுகிறது என்பதைச் சிந்தித்துப் பார்க்கவும்.

2. கோணத்திலிருந்து $360°$ இன் மடங்குகளை (ரேடியனில் தரப்பட்டால் 2π இன் மடங்குகள்) நீக்கவும்.

3. எஞ்சிய கோணத்தைத் துணைப் படத்தில் வரைந்து எந்தப் பிரிவில் சுற்று ஆரம் அமைகிறது எனப் பார்க்கவும். $\left(\frac{\pi}{4}\right.$ என்பது கால் வட்டம் என்பதை நினைவு கூர்க.$\left.\right)$

4. இப்போது கோண விகிதத்தின் குறி + அல்லது — என்பது தெளிவாகிறது.

5. மதிப்புக் காண, x அச்சுடன் சுற்று ஆரம் என்ன குறுங் கோணம் ஏற்படுத்துகிறதோ அந்தக் கோணத்தின் கோண விகிதமாகும். அல்லது y அச்சுடன் எந்தக் குறுங்கோணம் ஏற்படுத்துகிறதோ அதன் துணைக் கோண விகிதம் (Coratios) ஆகும்.

{ [சைன், கோசைன்] [சீகண்டு, கோசீகண்டு] [டான்ஜண்டு, கோடான்ஜண்டு] இவை ஒன்றற்கொன்று துணை விகிதங்க ளெனப்படும். }

மாதிரி: (*i*) $\sin 840°$ இன் மதிப்பு என்ன?

$$840° = 2 \times 360° + 120°$$

$$\therefore \sin 840° = \sin 120°;$$ விகிதத்தின் **குறி** +

$$= + \sin 60°$$

$$\therefore \sin 840° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ii) tan 2490° இன் மதிப்பு என்ன?

$$2490^\circ = 360 \times 6 + 330$$

$$\therefore \tan 2490^\circ = \tan 330^\circ$$

கோணம் 4வது பிரிவு அமைவதால் — ஆகும்.

$$\therefore \tan 2490^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(iii) $\cos\left(\frac{7\pi}{2} + A\right)$ இன் மதிப்பு என்ன?

$\frac{7\pi}{2} + A$ = 7 கால்வட்டம் + A. சுற்று ஆரம் 4ம் பிரிவில் அமைகிறது. கோசைன் விகிதத்தின் குறி +; y அச்சுடன் 'A' எனும் கோணம் ஏற்படுத்துகிறது.

$$\therefore \cos\left(\frac{7\pi}{2} + A\right) = \sin A$$

[பழக்கத்தில், வழியை மனத்தில் சிந்தித்து விடையை உடனே எழுதப் பழகவும்.]

பயிற்சி 18

மதிப்பு எழுதுக.

1. $\sin 210^\circ$	2. $\sin 240^\circ$	3. $\cos 150^\circ$
4. $\sin \frac{3\pi}{4}$	5. $\tan \frac{3\pi}{4}$	6. $\sin 300^\circ$
7. $\sin 780^\circ$	8. $\cos 1080^\circ$	9. $\tan 5\pi + \frac{\pi}{4}$
10. $\cot -855^\circ$	11. $\cos 870^\circ$	12. $\sec 2040^\circ$
13. $\operatorname{cosec} -1305^\circ$	14. $\sin 1125^\circ$	15. $\tan -1485^\circ$
✓ 16. $\cos\left(\frac{9\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$	17. $\sec\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$	18. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Aயின் கோண விகிதங்களாகக் கூறுக.

19. $\sin(270+A)$	20. $\cot(270-A)$	21. $\tan\left(\frac{5\pi}{2}+A\right)$
22. $\cos\left(\frac{7\pi}{2}-A\right)$	23. $\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}+A\right)$	24. $\sin\left(A-\frac{\pi}{2}\right)$
25. $\cos\left(A-\frac{5\pi}{2}\right)$	26. $\tan\left(A-\frac{7\pi}{2}\right)$	27. $\sec\left(A-\frac{9\pi}{2}\right)$

(*i*) குறுங் கோணத்தின் (*ii*) 45°க்குக் குறைவான கோணத்தின், கோண விகிதங்களாகக் கூறுக.

28. $\sin 248°$	29. $\cos 275°$	30. $\cos 183°$
31. $\tan 1072°$	32. $\sec 770°$	33. $\operatorname{cosec} 488°$
34. $\cot -640°$	35. $\sin -320°$	36. $\tan -1260°$

பயிற்சி 19

சுருக்குக :

1. $\sin(180 - A) \cos(90 - A)$
2. $\sin(180 + A) \cos(90 + A)$
3. $\tan(180 + A) \tan(180 - A)$

5. முக்கோணத்தின் பக்கங்களும் கோணங்களும்

முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் கோணங்கள் இவைகளைக் கணக்கிட மிகவும் பயன்பட்டதாலேயே இக்கணிதப் பிரிவுக்கு 'திரிகோண அளவை' எனப் பொருள்படும் Trigonometry எனப் பெயர் வாய்த்தது என்று துவக்கத்தில் கூறினோம்.

இங்குக் கோண விகிதங்கள், ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கம், கோணம், இவைகளிடையே நிலவும் தொடர்புகளை எவ்வாறு காட்டுகின்றன என்பதைக் கூறுவோம்.

5·1 **பழக்கத்தில் உள்ள சில குறியீடுகள் :** (Certain usual notations).

(*i*) △ ABC என்பது பொதுவாக முக்கோணத்தைக் குறிக்கிறது.

(*ii*) A, B, C என்பவை முக்கோணத்தின் கோணங்கள்

$$\therefore \quad A + B + C = 180^\circ \text{ ஆகும்.}$$

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ \text{ ஆகும்.}$$

(*iii*) *a*, *b*, *c* என்பவை முறையே A, B, C என்ற கோணங்களுக்கு எதிர்ப்பக்கங்களின் அளவுகளாகும்.

(*iv*) $a+b+c$ எனும் பக்க நீளங்களின் கூட்டுத் தொகையை, அதாவது முக்கோணத்தின் சுற்றளவை '$2s$' எனக் குறிக்கப்படும்.

[*s* என்பது ஆங்கிலச் சொல் semi perimeter என்பதன் முதல் எழுத்து].

ஆகவே $a+b-c = 2s-2c = 2(s-c)$

$b+c-a = 2(s-a)$

$c+a-b = 2(s-b)$ என வரும்.

(v) R என்பது முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட ஆரத்தின் நீளமாகும்.

(vi) 'r' என்பது முக்கோணத்தின் உள் தொடு வட்டத்தின் ஆரம்

(vii) 'r_1' என்பது முக்கோணத்தில் 'A' என்ற கோணத்திற்கு எதிர் உள்ள வெளித் தொடு வட்ட ஆரமாகும். இவ்வாறே 'r_2' 'r_3' என்பவை B, C என்ற கோணங்களுக்கு எதிரிலுள்ள வெளித் தொடு வட்டங்களின் ஆரமாகும்.

(viii) உள் தொடு வட்டத்தின் மையம் I என்று குறிக்கப்படும். வெளித் தொடு வட்டங்களின் மையங்கள், I_1, I_2, I_3 எனக் குறிக்கப்படும்.

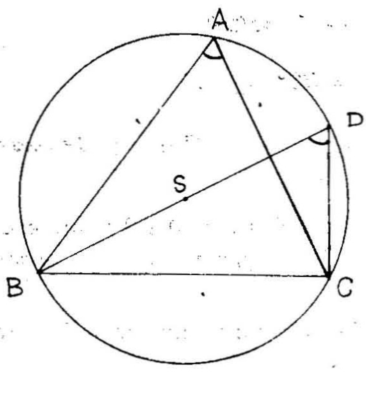
ஆகவே AI, BI, CI முக்கோணத்தின், A, B, C என்ற கோணங்களின் உள் சம வெட்டிகள். $I_2 I_3$, $I_3 I_1$, $I_1 I_2$ என்பவை அவற்றின் வெளிச் சம வெட்டிகளாகும்.

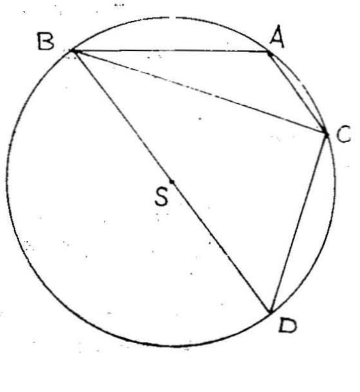
(ix) △ என்பது முக்கோணத்தின் பரப்பைக் குறிக்கும். (இதை 'டெல்டா' என அழைக்கிறோம்.) இனிமேல், பக்கம், கோணம் இவைகளிடையே நிலவும் முக்கிய தொடர்புகளைத் தரும் சூத்திரங்களை நிறுவுவோம்.

5·2 1. ABC என்ற முக்கோணத்தில்

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(இது முக்கோணத்தின் சைன் விதி என அழைக்கப்பெறும்).





ABC என்ற முக்கோணத்தில், S சுற்றுவட்ட மையம். BS, வட்டத்தை மறுபடியும் Dயில் வெட்டட்டும் CDஐச் சேர்க்கவும்.

B D வட்டத்தின் விட்டமாகிறது. $\therefore\ \angle BCD = 90°$.

$\sin \angle BAC = \sin \angle BDC$ $\left\{ \begin{array}{l} \because\ \angle A = \angle D \text{ படம் (i)ல்} \\ \text{அல்லது } \angle A = 180 - \angle D \text{ படம் (ii)ல்} \end{array} \right.$

$$= \frac{BC}{BD}$$

$$= \frac{a}{2R}$$

$\therefore\ a = 2R \sin A$; இதேபோன்று $b = 2R \sin B$; $c = 2R \sin C$

$$\therefore\ \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

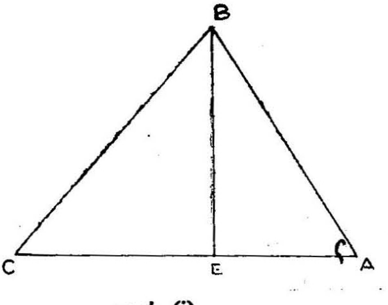
குறிப்பு 1. $A = 90°$ என்றால், B C சுற்று வட்டத்தின் விட்டமாகும். $\therefore\ a = BC = 2R = 2R \sin 90° = 2R \sin A$; B C கர்ணமாவதால் $b = BC \sin B = 2R \sin B$; இவ்வாறே $c = BC \sin C = 2R \sin C$. சைன் விதி செங்கோண முக்கோணத்திற்கும் பொருந்தும்.

குறிப்பு 2. மேற்கூறிய நிறுவகையிலிருந்து "ஒரு வட்டத்தின் நாண்கள், அவை வட்டப் பரிதியில் தாங்கும் கோணங்களின் சைன் விகிதங்களுடன் நேர்விகிதப் பொருத்தத்தில் இருக்கின்றன" என்பது தெளிவாகிறது. ஏனெனில் B C என்பது நாண் ; அது வட்டப் பரிதியில் தாங்கும் கோணம் A ; $BC = 2R \sin A$ எனக் காட்டியுள்ளோம்.

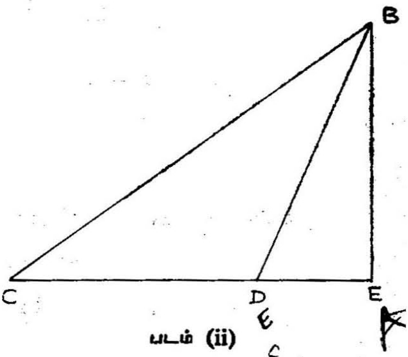
5·3 ABC என்ற முக்கோணத்தில்

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\, bc \sin A = \tfrac{1}{2}\, ca \sin B = \tfrac{1}{2}\, ab \sin C$$

(இது முக்கோணத்தின் பரப்பைத் தரும் சூத்திரம்)



படம் (i)



படம் (ii)

ABC என்பது முக்கோணம்.

BE ⊥ AC என வரைக.

படம் (i)ல் $\angle BAE = A$ (குறுங்கோணம்)

படம் (ii)ல் $\angle BAE = 180 - A$ (A விரி கோணம்)

இரண்டிலும் $\sin \angle BAE = \sin A$

ஆனால் $BE = AB \sin BAE$

$\therefore\ BE = c \sin A$

$\triangle = \frac{1}{2} AC \cdot BE = \frac{1}{2} bc \sin A$

இதேபோல் மற்றக் குத்துக்கோடுகள் வரைய $\triangle = \frac{1}{2} ca \sin B$ அல்லது $\triangle = \frac{1}{2} ab \sin C$ எனக் காட்டலாம்.

இவ்வாறாக முக்கோணத்தின் பரப்பு, "இரு பக்கங்கள், அவை அடக்கும் கோணத்தின் சைன் விகிதம், இவற்றின் பெருக்கற் பலனின் பாதியாகும். (area of a triangle = $\frac{1}{2}$ the Product of two sides × sine of the included angle.)

குறிப்பு 1. $\triangle = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin c$

$$\therefore\ \frac{2\triangle}{abc} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\therefore\ \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2\triangle}$$

குறிப்பு 2. $\therefore\ abc = 4R\triangle$

i.e. $\triangle = \frac{1}{2} bc \sin A$ ஆனால் $\sin A = \frac{a}{2R}$

$$\therefore\ \triangle = \frac{bc}{2} \cdot \frac{a}{2R}$$

$$\therefore\ abc = 4R\triangle$$

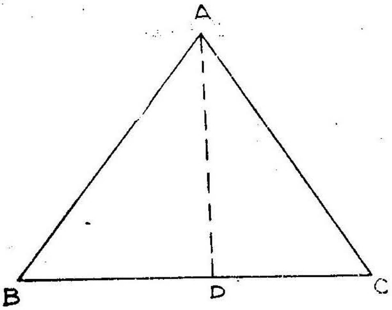
அல்லது $\frac{abc}{4R} = \triangle$

குறிப்பு 3. $\triangle = \frac{1}{2} ab \sin c$

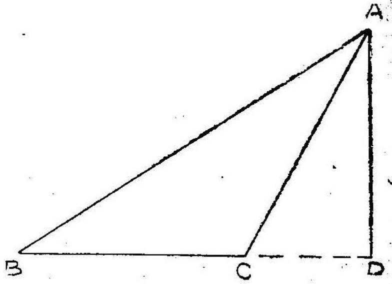
$= \frac{1}{2}\, 2R \sin A\ \ 2R \sin B\ \ \sin C$

$\triangle = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$

5·6 முக்கோணம் ABCயில் $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C$ (இது கோசைன் விதி எனப்படும்)



படம் (i)



படம் (ii)

ABC என்ற முக்கோணத்தில் படம் (i)ல் C குறுங்கோணம். BCக்கு AD குத்துக்கோடு வரைக. 'அறிமுறை ஜியோமிதித்' தேற்றத்தின்படி $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC$. ஆனால் $DC = AC \cos C = b \cos C$

$$\therefore \quad c^2 = b^2 + a^2 - 2\,ab \cos C$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C$$

படம் (ii)ல் C விரிகோணம். BCக்கு AD குத்துக்கோடு.

$$\therefore \quad \angle ACD = 180 - C$$
$$\therefore \quad CD = AC \cos \angle ACD$$
$$= b \cos (180 - C)$$
$$= -\,b \cos C$$

ஆனால் அறிமுறை ஜியோமிதித் தேற்றப்படி

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2\,BC \cdot DC$$
$$\therefore \quad c^2 = b^2 + a^2 + 2a(-\,b \cos C)$$
$$\therefore \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C$$

இரண்டு படங்களிலும், அதாவது C குறுங்கோணமாயினும், விரிகோணமாயினும்

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C$$

இதேபோன்று

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \quad \text{என வரும்.}$$

$$\angle A = 90^\circ \text{ ஆனால் } \cos A = 0$$

$$\therefore \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ = b^2 + c^2$$

$\therefore$ A = 90°க்கும் கோசைன் விதி பொருந்துகிறது.

5·7 முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$2bc \sin A = 4 \triangle$$

இரு பக்கங்களையும் வர்க்கம் ஆக்கிக் கூட்ட

$$4b^2 c^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) = (b^2 + c^2 - a^2)^2 + 16 \triangle^2$$

$$\begin{aligned} 16 \triangle^2 &= 4b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\ &= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) \\ &= \{(b+c)^2 - a^2\}\{a^2 - (b-c)^2\} \\ &= (b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c) \\ &= (2s)(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c) \\ &= 16s(s-a)(s-b)(s-c) \end{aligned}$$

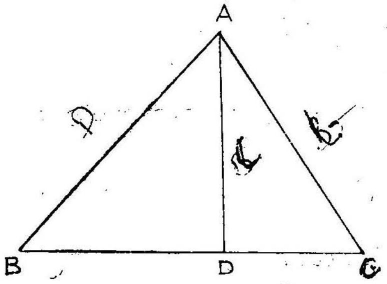
$$\therefore \quad \triangle^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

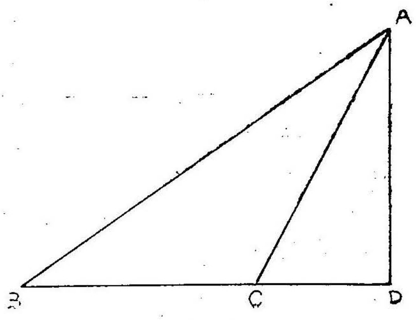
[இதன் மாற்று நிரூபணம் ஒன்றைப் பிற்கோப்பில் காண்க]

5·8 ABC என்ற முக்கோணத்தில்

$$a = b \cos C + c \cos B$$



படம் (i)



படம் (ii)

முக்கோணம் ABCயில் AD ⊥ BC

பயம் (i)ல் $\angle C$ குறுங்கோணம். (ii)ல் விரிகோணம்.

படம் (i)ல் $CD = b \cos C$

$a = BD + DC$

$a = c \cos B + b \cos C$

படம் (ii)ல் $CD = b \cos ACD$

$= b \cos \overline{180 - C}$

$= - b \cos C$

$a = BD - DC$

$= C \cos B - (-b \cos C)$

$\therefore \quad a = c \cos B + b \cos C$

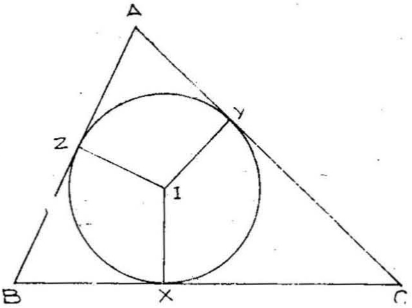
ஆகவே முக்கோணம் எத்தகையதாயினும்

$$a = c \cos B + b \cos C$$

இதேபோல $b = a \cos C + c \cos A$

$$c = b \cos A + a \cos B$$

5·9 உள் தொடுவட்ட ஆரம், வெளித் தொடுவட்ட ஆரம் இவை பற்றிய சூத்திரங்கள்.



ABC என்ற முக்கோணத்தில், I அதன் உள்தொடு வட்ட மையம். IX, IY, IZ முறையே BC, CA, ABக்குக் குத்துக் கோடுகள்.

$\therefore \quad IX = IY = IZ = r$

AI, BI, CI இவைகளைச் சேர்.

$\Delta = \Delta$ ABCயின் பரப்பு

$= \Delta BIC + \Delta CIA + \Delta AIB$

$= \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr$

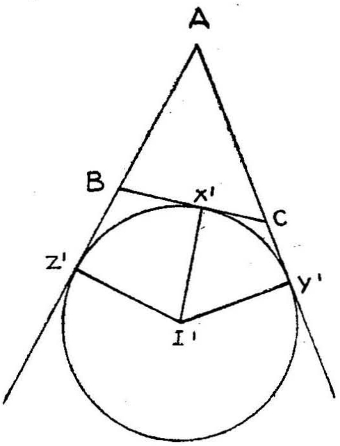
$$= r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$\therefore \triangle = rs \quad \therefore r = \frac{\triangle}{s}$$

5·10 ABC என்ற முக்கோணத்தில்

$$r_1 = \frac{\triangle}{(s-a)}; \quad r_2 = \frac{\triangle}{(s-b)} \quad r_3 = \frac{\triangle}{(s-c)}$$

ABC என்ற முக்கோணத்தில் I_1, Aக்கு எதிரான, வெளித் தொடுவட்ட மையம். I_1X', I_1Y', I_1Z' என்பவை BC, CA, ABக்குக் குத்துக் கோடுகள்.



$\therefore I_1X' = I_1Y' = I_1Z' = r_1$

$\triangle = \triangle$ ABCயின் பரப்பு

$$= \triangle AI_1B + \triangle AI_1C - \triangle BI_1C$$

$$= \tfrac{1}{2}cr_1 + \tfrac{1}{2}br_1 - \tfrac{1}{2}ar_1$$

$$= r_1\left(\frac{c+b-a}{2}\right)$$

$$\therefore \triangle = r_1(s-a) \quad \therefore r_1 = \frac{\triangle}{s-a}$$

இதேபோல $r_2 = \dfrac{\triangle}{(s-b)}$; $r_3 = \dfrac{\triangle}{s-c}$

பொருள் சுருக்கம்

1. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

   அல்லது $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$.

2. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$,

   $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

   $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

3. $a = b\cos C + c\cos B$

   $b = c\cos A + a\cos C$

   $c = a\cos B + b\cos A$

4. $\triangle = \frac{1}{2} bc \sin A = 2 R^2 \sin A \sin B \sin C = \frac{abc}{4R}$

$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

5. $r = \frac{\triangle}{s}$; $r_1 = \frac{\triangle}{s-a}$; $r_2 = \frac{\triangle}{s-b}$; $r_3 = \frac{\triangle}{s-c}$

அல்லது $rs = r_1(s-a) = r_2(s-b) = r_3(s-c) = \triangle$.

[r, r_1, r_2, r_3 இவை, s, $(s-a)$, $(s-b)$, $(s-c)$ என்றவைகளின் தலைகீழ் விகிதத்தில் இருக்கின்றன].

5·11 முக்கோணங்களின் உறுப்புக்களைக் கணக்கிடல். (Solution of triangles) :

(எளிய கணக்குகள்)

ஒரு முக்கோணத்திற்கு, 3 பக்கங்களும், 3 கோணங்களுமாக 6 உறுப்புக்கள் உள்ளன. இவற்றுள் 3 கோணங்களும் சேர்ந்து 180° ஆகும். கீழ்வரும் முக்கோண வரைமுறை உயர்நிலைப்பள்ளி வகுப்புக்களில் பாடமாகும். (i) 3 பக்கங்கள் (ii) இரண்டு பக்கங்களும் அவை உள்ளடங்கு கோணமும் (iii) இரண்டு கோணமும் ஒரு பக்கமும் (iv) ஈரடிவகை அதாவது இரண்டு பக்கங்களும், அவை உள்ளடங்காத கோணம் ஒன்றும்.

வரைமுறையால் கண்டதை, இங்கு கோண விகிதங்களைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடும் வழியைக் கூறுவோம்.

1. மூன்று பக்கங்கள்.

மாதிரி 1: $a = 15,\ b = 7,\ c = 13$ என்றால் $\angle C$ என்ன?

சூத்திரப்படி $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$\therefore \quad 2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2$

$2 \times 15 \times 7 \cos C = 15^2 + 7^2 - 13^2$

$210 \cos C = 225 + 49 - 169 = 105$

$\cos C = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad C = 60°$

இரண்டு பக்கங்களும் உள்ளடங்கும் கோணம்:

மாதிரி 2: $a = 3,\ c = 5\ \ B = 120°\ \ b$ என்ன?

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$= 9 + 25 - 30 \cos 120°$

$$= 9 + 25 - 30 (- \tfrac{1}{2})$$

$$= 9 + 25 + 15 \quad = 49$$

$$\therefore \quad b = 7$$

இரண்டு கோணங்களும் ஒரு பக்கமும்.

மாதிரி 3: $A = 60°$ $B = 45°$ $a = 84$ **b, $\angle C$ இன் மதிப்பு என்ன?**

$A = 60°$ $B = 45°$ $\therefore$ $\angle C = 75°$

($A + B + C = 180°$ ஆனதால்)

சைன் விதிப்படி $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

$$\therefore \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{84 \sin 45°}{\sin 60°}$$

$$\therefore \quad b = 84 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 28\sqrt{6}$$

மாதிரி 4: ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் சைன் விகிதங்கள் 5 : 7 : 8 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. கோணங்களின் கோசைன் விகிதங்கள் 11 : 7 : 2 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன எனக் காட்டுக.

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

$$= 5 : 7 : 8$$

$$\cos A : \cos B : \cos C = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc} ; \frac{c^2+a^2-b^2}{2\,ca} ; \frac{a^2+b^2-c^2}{2\,ab}$$

$$= a\,(b^2+c^2-a^2) : b\,(c^2+a^2-b^2) : c(a^2+b^2-c^2)$$

$$= 5 \times 88 : 7 \times 40 : 8 \times 10$$

$$= 11 \ : \ 7 \ : \ 2.$$

பயிற்சி 20

1. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 16, 5, 19 என்றால் மிகப் பெரிய கோணத்தைக் கணக்கிடு.

2. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 6, 8, 11; மிகச் சிறிய கோணத்தின் கோசைன் விகிதமென்ன? பட்டியலிலிருந்து கோணத்தைக் காண்க.

3. $a = 10$, $b = 10\sqrt{2}$, $c = 10$. கோணங்களைக் கணக்கிட்டுக் காண்க.

4. $a = 25$, $b = 7\sqrt{2}$, $\angle A = 45°$ பக்கம் c என்ன?

5. $a = 25$, $b = 7\sqrt{2}$ $A = 45°$ பக்கம் c என்ன?

6. $a = \sqrt{3} + 1$ $b = 2$, $C = 60°$ பக்கம் c யாது?

7. $a = 5\sqrt{}$ $b = 11$, $C = 150°$, c, $\cos A$, என்ன?

8. $b = 7$, $c = 8$ $A = 120°$ 'a'இன் மதிப்பு என்ன?

9. $A = 45°$ $B = 105°$ $C = \sqrt{2}$ பக்கம் 'a' என்ன?

10. ஒரு முக்கோணத்தின் சைன் விகிதங்கள் 7 : 5 : 3 எனும் விகிதத்தில் உள்ளன. அவைகளின் கோசைன் விகிதங்கள் —7 : 11 : 13 எனும்படி உள்ளன எனக் காட்டு.

பலவகைக் கணக்குகள்

[முக்கோணத்தின் உறுப்புக்களைக் கொண்ட முற்றொருமைகள்]

மாதிரி: $\triangle$ ABCயில் $a^2 + b^2 + c^2 = 2bc\cos A + 2ca\cos B + 2ab\cos C$ என நிறுவுக.

$$2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$$
$$2ca\cos B = c^2 + a^2 - b^2$$
$$2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$$
$$\therefore\ 2bc\cos A + 2ca\cos B + 2ab\cos C = a^2 + b^2 + c^2.$$

பயிற்சி 21

நிறுவுக:

1. $(b^2 + c^2 - a^2)\tan A = (c^2 + a^2 - b^2)\tan B = (a^2 + b^2 - c^2)\tan C$

2. $\dfrac{c - b\cos A}{a - b\cos C} = \dfrac{\sin A}{\sin C}$

3. $a^2 - b^2 = c\,[a\cos B - b\cos C]$

4. $(a - b)\sin C + (b - c)\sin A + (c - a)\sin B = 0$

5. $(a^2 - b^2)\sin^2 C + (b^2 - c^2)\sin^2 A + (c^2 - a^2)\sin^2 B = 0$

6. $(a^2 - b^2)\cos^2 C + (b^2 - c^2)\cos^2 A + (c^2 - a^2)\cos^2 B = 0$

7. $a^2(\tan B - \tan C) = (b^2 - c^2)(\tan B + \tan C)$

8. $\dfrac{a}{bc} + \dfrac{\cos A}{a} = \dfrac{b}{ca} + \dfrac{\cos B}{b} = \dfrac{c}{ab} + \dfrac{\cos C}{c}$

9. $(b^2 - C^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C = 0$

10. $\dfrac{\cot B - \cot C}{b^2 - c^2} = \dfrac{\cot C - \cot A}{c^2 - a^2} = \dfrac{\cot A - \cot B}{a^2 - b^2}$

($SX = R \cos A$ என்பதைப் பயன்படுத்து.)

11. முக்கோணம் ABCயில்

$\dfrac{b+c}{5} = \dfrac{c+a}{6} = \dfrac{a+b}{7}$ என்றால்

$\dfrac{\sin A}{4} = \dfrac{\sin B}{3} = \dfrac{\sin C}{2}$ எனவும்

$\dfrac{\cos A}{-12} = \dfrac{\cos B}{33} = \dfrac{\cos C}{28}$ எனவும் நிறுவுக.

12. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் முறையே $n^2 + n + r$, $2n + 1$, $n^2 - 1$ என்றால் மிகப் பெரிய கோணம் 120° எனக் காட்டு.

தொடுவட்ட ஆரங்கள் பற்றிய கணக்குகள்.

மாதிரி: $(r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r) = 4Rr^2$ எனக் காட்டு.

$$r_1 - r = \frac{\Delta}{(s-a)} - \frac{\Delta}{s}$$

$$= \frac{a\Delta}{s(s-a)}$$

இதேபோல $(r_2 - r) = \dfrac{b\Delta}{s(s-b)}$; $(r_3 - r) = \dfrac{c\Delta}{s(s-c)}$

$$\therefore\ (r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r) = \frac{abc\,\Delta^3}{s^3(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{abc\,\Delta^3}{s^2\,\Delta^2} = \frac{abc\,\Delta}{s^2}$$

$$= \frac{abc}{\Delta} \cdot \frac{\Delta^2}{s^2}$$

$$= 4R \cdot r^2$$

[குறிப்பு: வட்டச்சீர் (Cyclic symmetry) வருமிடத்து

(i) ஒரு உறுப்பின் மதிப்பைக் கண்டு, 'இதேபோல' எனச் சொல்லி மற்ற உறுப்புக்களை எழுதலாம்.

$$r r_1 = \frac{\triangle^2}{s(s-a)} = (s-b)(s-c). \text{ ஆகவே}$$

$rr_2 = (s-c)(s-a)$ $rr_3 = (s-a)(s-b)$ என வரும்.

(ii) $\sum a(b-c) = 0$; $\sum a^2(b^2-c^2) = 0$ $\sum (b-c) = 0$ எனப்படும் முடிவுகளையும் உடனே பயன்படுத்தலாம்.]

மாதிரி: $(b-c)\, r_2 r_3 + (c-a)\, r_3 r_1 + (a-b)\, r_1 r_2 = 0$ எனக் காட்டு.

$$(b-c)\, r_2 r_3 = (b-c) \frac{\triangle}{(s-b)} \cdot \frac{\triangle}{(s-c)}$$

$$= \frac{(b-c)\triangle^2}{(s-b)(s-c)}$$

$$= (b-c)\, s(s-a)$$

$$= s^2(b-c) - sa(b-c)$$

$$\therefore \sum (b-c)\, r_2 r_3 = s^2 \sum (b-c) - s \sum a(b-c)$$

$$= 0 - 0$$

$$= 0$$

பயிற்சி 22

நிறுவுக:

1. $rr_1 r_2 r_3 = \triangle^2$
2. $4Rrs = abc$
3. $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r}$
4. $r_2 r_3 + r_3 r_1 + r_1 r_2 = s^2$
5. $(r_1 - r)(r_2 + r_3) = a^2$
6. $r_1 r_2 r_3 = r s^2$
7. $r_1 r_2 + rr_3 = abc$
8. $a\, rr_1 = (r_1 - r)\triangle$.
9. $ar_2 r_3 = (r_2 + r_3)\, b$.
10. $a(rr_1 + r_2 r_3) = b(rr_2 + r_3 r_1) = c(rr_3 + r_1 r_2)$

11. $(r_1 + r_2)(r_3 + r_3)(r_3 + r_1) = 4\,R\,s^2$

12. $r_1 + r_2 + r_3 - r = 4\,R.$

13. r_1 r_2, r_3 என்பவை முக்கோணத்தின் குத்துயரங்கள் என்ருல்

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

14. $r(\sin A + \sin B + \sin C) = 2R \sin A \sin B \sin C.$

15. ABC என்ற முக்கோணத்தில் $r_1\, r_3 = r_2\, r$ என்ருல் முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணம் எனக் காட்டு.

16. r_1 r_2, r_3 ஆர்மானிக் தொடரில் (H · P) இருந்தால் பக்கங்கள் கூட்டுத்தொடரில் உள்ளன.

17. $r_1 : r_2 : r_3 = 1 : 2 : 3$ என்ருல்

$a : b : c = 5 : 8 : 9$ என நிறுவுக.

6. கோணச் சேர்க்கைகளின் கோணவிகிதங்கள்

(Trigonometrical Ratios of Compound Angles)

கோணம் எத்தகையதாயினும், அதன் கோண விகிதங்கள் என்ன என்பதைக் கூறினோம். குறுங்கோண விகிதப்பட்டியலிலிருந்து, எல்லாக் கோணங்களுக்கும் கோணவிகிதம் காணும் முறையையும் கூறினோம்.

தனித்தனியே கோணங்களின் கோண விகிதங்கள் தரப்பட, அவற்றின் சேர்க்கைகளான கோணங்களின் விகிதங்கள் காணும் முறையைக் கூறுவோம். அதாவது A, B, C எனும் கோணங்களின் கோணவிகிதம் தரப்பட $A+B$, $A-B$, $A+B+C$, ... எனும் கோணங்களின் கோண விகிதங்களென்ன? என்பதே நமது கேள்வி. கீழே தரப்படும் மிகமிக முக்கியமான **தொடர்புகளை நிறுவுவோம்.**

I. $$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

II. $$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

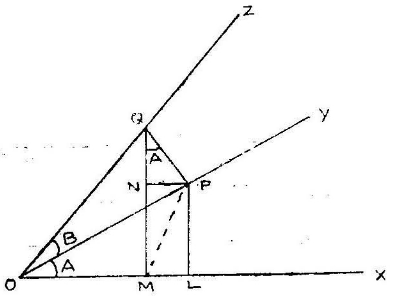
$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

6·1 படம் வழி நிறுவுகை:

(i) $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

(ii) $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$



$\angle XOY = A$; $\angle YOZ = B$ $\therefore$ $\angle XOZ = A + B$

OZல் Q எனும் புள்ளியைக் கொள்க.

$QM \perp OX$, $QP \perp OY$ $PL \perp OX$

$PN \perp QM$ எனக் குத்துக் கோடுகள் வரைக.

M O Q P என்பது ஒரு வட்ட நாற்கரம்.

[$\because$ $\angle OMQ = \angle OPQ = 90°$]

(i) $\therefore$ $\angle PQN = \angle POM = \angle POL = A$.

(ii) LMNP ஒரு செவ்வகம் $\therefore$ $LP = MN$; $LM = PN$

$$\begin{aligned} OQ \sin(A+B) &= MQ \\ &= MN + NQ \\ &= PL + NQ \\ &= OP \sin A + PQ \cos A \\ OQ \sin(A+B) &= OQ \cos B \sin A + OQ \sin B \cos A \\ \therefore \sin(A+B) &= \cos B \sin A + \sin B \cos A \end{aligned}$$

$$\therefore \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\begin{aligned} OQ \cos(A+B) & \\ &= OM \\ &= OL - ML \\ &= OL - PN \end{aligned}$$

$$= \text{OP} \cos A - \text{PQ} \sin A$$
$$= \text{OQ} \cos B \cos A - \text{OQ} \sin B \sin A$$
$$\cos (A+B) = \cos B \cos A - \sin B \sin A$$
$$\mathbf{\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

[**குறிப்பு:** எதிர்ப்பக்கம் = கர்ணம் × சைன்விகிதம்
அடுத்தபக்கம் = கர்ணம் × கோசைன்விகிதம்
என்பதைப் பயன்படுத்தியுள்ளோம்.

(ii) நிறுவும்போது முதலில் Aயின் கோணவிகிதம் வெளிப்படுகிறது. பின்னர் Bயின் கோணவிகிதம் வெளிப்படுகிறது.

(iii) A, B, (A + B) மூன்றும் படத்தில் குறுங்கோணங்கள். ஆயினும் கோணங்கள் எத்தகையவாயினும் இவ்விதி பொருந்தும்].

6·2 $$\mathbf{\tan (A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}}$$

$$\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$= \cos A \cos B (\tan A + \tan B)$$
$$\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$
$$= \cos A \cos B (1 - \tan A \tan B)$$
$$\therefore \frac{\sin (A+B)}{\cos (A+B)} = \frac{\cos A \cos B (\tan A + \tan B)}{\cos A \cos B (1 - \tan A \tan B)}$$
$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

இதன் படம் வழி நிறுவுகையைக் கீழே தருகிறோம்.

6·3 $\tan (A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ **எனப் படம் வரைந்து நிறுவுதல்.**

[படம் 6.1 பார்க்கவும்]

$\angle \text{LOP} = A \qquad \angle \text{POQ} = B \qquad \therefore \angle \text{LOQ} = A + B$

$\text{QM} \perp \text{OP} \qquad \text{QP} \perp \text{OP}$ என வரைக.

$\therefore \angle \text{MQP} = \angle \text{LOP} = A$

PN ⊥ M Q என வரைக. ∴ MN = LP ; ML = NP.

முக்கோணங்கள் QNP, OLP இவற்றில் ∠ NQP = ∠ LOP = A ; ∠ QNP = ∠OLP = 90°

∴ இவை வடிவொத்தவை.

$$\therefore \frac{NQ}{OL} = \frac{PQ}{OP} = \tan B$$

$$\therefore \tan(A+B) = \frac{MQ}{OM} = \frac{MN+NQ}{OL-ML} = \frac{LP+NQ}{OL-NP}$$

$$\therefore \tan(A+B) = \frac{\frac{LP}{OL}+\frac{NQ}{OL}}{1-\frac{NP}{OL}}$$

$$= \frac{\frac{LP}{OL}+\frac{NQ}{OL}}{1-\frac{NP}{NQ}\cdot\frac{NQ}{OL}}$$

$$= \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

மாதிரி 1: sin 75° இன் மதிப்பைக் காணவும்

$$\sin 75° = \sin(45°+30°)$$

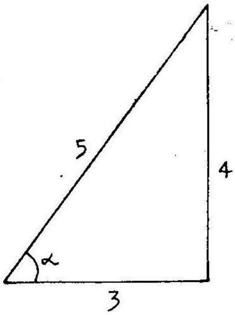
$$= \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$$

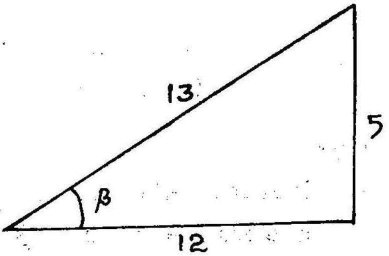
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin 75° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

மாதிரி 2: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ $\sin\beta = \frac{5}{13}$ என்றால்

cos $(\alpha+\beta)$ இன் மதிப்பைக் காணவும்.





$\sin \alpha = \frac{4}{5}$ $\therefore$ $\cos \alpha = \frac{3}{5}$

$\sin \beta = \frac{5}{13}$ $\therefore$ $\cos \beta = \frac{12}{13}$

(இவற்றைத் துணைப் படங்களால் அறிகிறோம்).

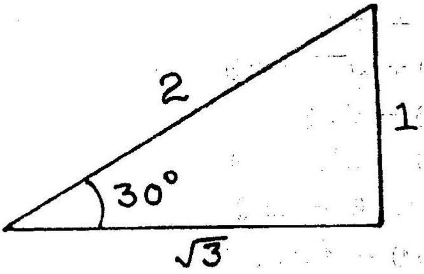
$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13}$$

$$= \frac{36 - 20}{65}$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \frac{16}{65}$$

மாதிரி 3 : $\sqrt{3} \sin\theta + \cos\theta$ ஐ ஒரே கோண விகிதமாகக் கூறுக.



$$\sqrt{3}\ \sin\theta + \cos\theta = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right]$$

$$= 2\,[\cos 30^\circ \sin\theta + \sin 30^\circ \cos\theta]$$

$$\therefore\ \sqrt{3}\ \sin\theta + \cos\theta = 2\sin(\theta + 30^\circ)$$

பயிற்சி 23

(பெரும்பாலும் வாய்மொழி)

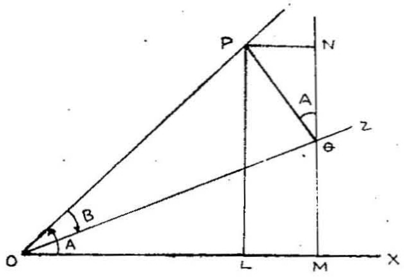
சுருக்குக :

1. $\sin A \cos B + \cos A \sin B$
2. $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
3. $\cos C \sin D + \sin C \cos D$
4. $\sin 3\alpha \cos \beta + \cos 3\alpha \sin \beta$
5. $\cos 3\alpha \sin 2\alpha + \sin 3\alpha \cos 2\alpha$
6. $\cos A \cos B - \sin A \sin B$
7. $\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta$
8. $\cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha$
9. $\cos 5\alpha \cos \beta - \sin 5\alpha \sin \beta$
10. $\sin 15^\circ \cos 30^\circ + \cos 15 \sin 30^\circ$
11. $\sin 22^\circ \cos 38^\circ + \cos 22^\circ \sin 38^\circ$
12. $\sin 38^\circ \cos 52^\circ + \cos 38^\circ \sin 52^\circ$
13. $\cos 25^\circ \sin 15^\circ + \sin 25 \cos 15^\circ$
14. $\sin 18^\circ \sin 42^\circ - \cos 18^\circ \cos 43^\circ$
15. $\sin 17^\circ \sin 13^\circ - \cos 17^\circ \cos 13^\circ$
16. $\sin\theta + \cos\theta$
17. $\sin\theta + \sqrt{3}\ \sin\theta$
18. $\cos\theta - \sin\theta$
19. $\text{sos}\,\theta - \sqrt{3}\ \sin\theta$
20. $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta$
21. $4\cos\theta + 3\sin\theta$.

6·4 படம் வழி நிறுவுக :

$$\sin (A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos (A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$



$\angle XOY = A$; $\angle YOZ = B$ $\therefore$ $\angle XOZ = A = B$ OZல் Q எனும் புள்ளியைக் கொள்க.

$QM \perp OX$; $QP \perp OY$; $PL \perp OX$; $PN \perp QM$ எனக் குத்துக் கோடுகள் வரைக.

(i) MOQP ஒரு வட்ட நாற்கரம். $\because \angle OPQ = \angle OMQ = 90°$

$\therefore$ (i) $\angle PQN = \angle POM = A$; (ii) LMNP ஒரு செவ்வகம்.

$\therefore$ $LM = PM$; $MN = PL$

$$OQ \sin (A-B) = QM$$
$$= MN - NQ$$
$$= PL - NQ$$
$$= OP \sin A - PQ \cos A$$
$$OQ \sin (A-B) = OQ \cos A - OQ \sin B \cos A$$
$$\therefore \sin (A-B) = \sin A \cos B \cos A \sin B$$
$$OQ \cos (A-B)$$
$$= OM$$
$$= OL + LM$$
$$= OL + PN$$
$$= OP \cos A + PQ \sin A$$
$$= OQ \cos B \cos A + OQ \sin A$$
$$\therefore \cos (A-B) = \cos A \cos B + \sin B \sin A$$

$\tan (A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ என நிறுவுக.

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\cos A\cos B(\tan A-\tan B)$

$\cos(A-B)=\cos A\cos+B\sin A\sin B=\cos A\cos B(1+\tan A\tan B)$

$$\therefore \quad \tan(A-B)=\frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

6·5 இதைப் படம்வழி நிறுவுவோம். (6·2ல் உள்ள படத்தைப் பார்க்கவும்)

$\angle LOP=A$; $\angle POQ=B$ $\therefore$ $\angle MOQ=A-B$ $PL \perp OL$ $QM\perp OL$; $QP\perp OP$. $PN\perp MQ$ (நீட்டப்பட்டது)

$\therefore$ $\angle PQN=\angle A$ $\triangle LOP$, $\triangle NQP$ இல்

$\angle LOP=\angle NQP=A$
$\angle OLP=\angle QNP=90°$ $\therefore LOP \,|||\, \triangle NQP$

$$\therefore \frac{PQ}{OP}=\frac{NQ}{OL} \text{ ஆனால் } \frac{PQ}{OP}=\tan B$$

$$\therefore \frac{NQ}{OL}=\tan B$$

$$\tan(A-B)=\tan QOM=\frac{MQ}{OM}$$

$$\therefore \tan(A-B)=\frac{MN-QN}{OL+LM}$$

$$=\frac{LP-NQ}{OL+NP}$$

$$=\frac{\frac{LP}{OL}-\frac{NQ}{OL}}{1+\frac{NP}{OL}}$$

$$=\frac{\frac{LP}{OL}-\frac{NQ}{OL}}{1+\frac{NP}{NQ}\cdot\frac{NQ}{OL}}$$

$$=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

மாதிரி : sin 15° ; tan 15° இவைகளின் மதிப்பைக் காண்க :

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 35^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

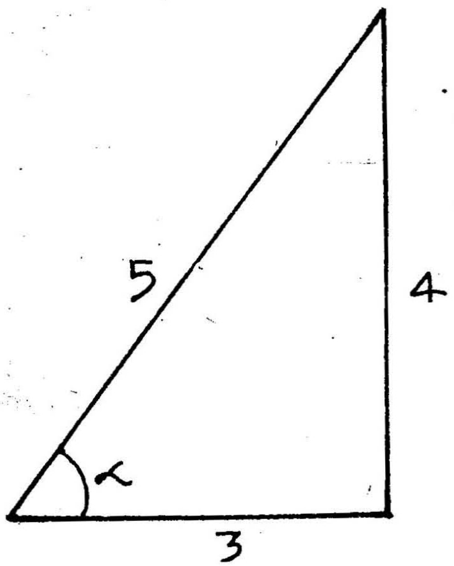
$$\tan 15^\circ = \tan(60^\circ - 45^\circ)$$

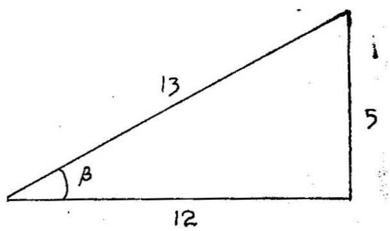
$$= \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

($15^\circ = 45^\circ - 30$ என்பதையும் பயன்படுத்தலாம்)

மாதிரி : $\tan \alpha = \frac{3}{4}$; $\cos \beta = \frac{12}{13}$ என்றால் (1) $\sin(\alpha - \beta)$ (ii) $\cos(\alpha - \beta)$ இவற்றின் மதிப்பு என்ன?





$\tan \alpha = \frac{3}{4} \quad \therefore \sin \alpha = \frac{4}{5}; \cos \alpha = \frac{3}{5} \quad \cos \beta = \frac{12}{13} \quad \therefore \sin \beta = \frac{5}{13}$

(i) $\therefore \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{48 - 15}{65} = \frac{33}{65}$$

(ii) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{36 + 20}{65} = \frac{56}{65}$$

மாதிரி: $\sin A = \frac{2}{3}, \sin B = \frac{5}{13}$; (*i*) Aயும் Bயும் குறுங் கோணமென்ருல் sin (A − B)யின் மதிப்பு என்ன? (*ii*) A விரி கோணமென்ருல் மதிப்பு என்ன?

$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ (A குறுங்கோணம்)

$\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{12}{13}$ (B குறுங்கோணம்)

(*i*) $\therefore \sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{13} - \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{5}{13}$$

$$= \frac{24 - 5\sqrt{5}}{39}$$

(*ii*) $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ (A > 90° ஆவதால்)

$\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{12}{13}$ (B < 90° ,,)

$\therefore \sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{13} + \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{5}{13}$$

$$= \frac{24 + 5\sqrt{5}}{39}.$$

மாதிரி: $\tan A = -\frac{5}{7}$

$\tan B = \frac{3}{4}$ என்றால் $\cos(A - B)$யின் மதிப்பு என்ன?

$\tan A = -\frac{5}{7}$ ஆவதால் A விரிகோணம்

$\therefore \quad \cos A = -\frac{7}{\sqrt{74}} \quad \sin A = \frac{5}{\sqrt{74}}$

$\cos B = \frac{4}{5} \quad \sin B = \frac{3}{5}$

$\therefore \cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B = -\frac{28+15}{5\sqrt{74}} = -\frac{13}{5\sqrt{74}}$

பயிற்சி 24

A

(வாய் மொழி)

சுருக்குக:

1. $\sin a \cos B - \cos a \sin B$
2. $\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x$
3. $\sin a \cos 2a - \cos a \sin 2a$
4. $\sin 4m \cos 5m - \cos 5m \sin 4m$
5. $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x$
6. $\cos 3y \cos y + \sin 3y \sin y$
7. $\sin\frac{3A}{2} \sin\frac{A}{2} + \cos\frac{3A}{2} \cos\frac{A}{2}$
8. $\cos 40^\circ \sin 10^\circ - \sin 40^\circ \cos 10^\circ$
9. $\sin 60^\circ \cos 70^\circ - \cos 60^\circ \sin 70^\circ$
10. $\sin 120^\circ \cos 10^\circ - \cos 120^\circ \sin 10^\circ$

B

11. $\sin a = \frac{3}{5}$; $\cos B = \frac{5}{13}$ என்றால் $\sin(a - \beta)$, $\cos(a - \beta)$ $\tan(a - \beta)$ இவைகளின் மதிப்பைக் காண்க, (i.) a விரிகோணமானால் மதிப்பு என்ன?

12. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ $\tan \beta = \frac{1}{4}$ என்றால் $\tan(\alpha+\beta) : \tan(\alpha-\beta) = 27 : 7$ எனக் காட்டு.

13. $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ $\tan B = -\frac{2}{3}$ என்றால் $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$ இவைகளின் மதிப்பைக் காண்க.

14. $\sin A = \frac{4}{5}$, $\sin B = \frac{8}{17}$ என்றால் $\cot(A-B)$யின் மதிப்பு என்ன? (A, B குறுங்கோணங்கள்).

15. $\tan A = \frac{9}{40}$ $\sec B = -\frac{13}{5}$ என்றால் $\cos(A+B)$யின் மதிப்பு என்ன?

16. $\tan \theta = -\frac{a}{b}$ $\tan \theta' = -\frac{a'}{b'}$ என்றால் $\tan(\theta'-\theta)$ வின் மதிப்பு என்ன?

17. $\tan 75° + \cot 75° = 4$ என நிறுவுக.

நிறுவுக :

18. $\dfrac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \tan A + \tan B$

19. $\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B} = \tan A - \tan B$

20. $\tan A - \tan B = a$; $\cot A - \cot B = b$ என்றால் $\cot(A-B) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

21. $\tan(45°-A) = \dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}$

22. $\dfrac{\sin(B-A)}{\cos B \cos A} + \dfrac{\sin(C-B)}{\cos C \cos B} + \dfrac{\sin(A-C)}{\cos A \cos C} = 0$

23. $\tan(45°+A) = \dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$

24. $\dfrac{\sin(A+B+C)}{\cos A \cos B \cos C}$
$= \tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C$

25. $\cos^2 A + \cos^2 B - 2\cos A \cos B \cos(A+B)$
$= \sin^2(A+B)$

6·6 முக்கிய முற்றொருமைகள் :

1. $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$\therefore \sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A\cos^2 B - \cos^2 A\sin^2 B$

$= \sin^2 A(1-\sin^2 B) - (1-\sin^2 A)\sin^2 B$

$= \sin^2 A - \sin^2 A\sin^2 B - \sin^2 B + \sin^2 A\sin^2 B$

$\therefore \sin(A+B)\cdot\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

2. $\cos(A+B)\cdot\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B.$

$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$\therefore \cos(A+B)\cdot\cos(A-B) = \cos^2 A\cos^2 B - \sin^2 A\sin^2 B$

$= \cos^2 A(1-\sin^2 B) - (1-\cos^2 A)\sin^2 B$

$= \cos^2 A - \cos^2 A\sin^2 B - \sin^2 B + \cos^2 A\sin^2 B$

$\therefore \cos(A+B)\cdot\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$

6·7 ஒரு கோணத்தின் இருமடங்கின் கோணவிகிதங்கள் :

(i) $\sin 2A = \sin(A+A)$

$= \sin A\cos A + \cos A\sin A$

$\therefore \sin 2A = 2\sin A\cos A$

(ii) $\cos 2A = \cos(A+A)$

$= \cos\cdot A\cos A - \sin A\cdot\sin A$

$\therefore \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A \quad (\because \cos^2 A = 1 - \sin^2 A)$

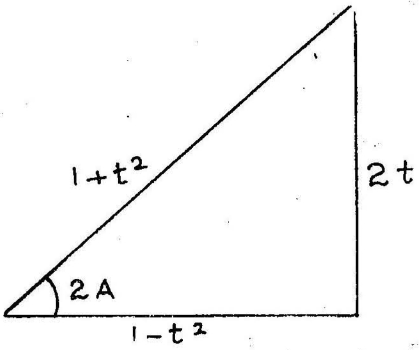
$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 \quad (\because \sin^2 A = 1 - \cos^2 A)$

(iii) $\tan 2A = \tan(A+A)$

$$= \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A\tan A}$$

$$\therefore \tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

[இவற்றின் படம் வழி நிருபணம் பிற்கோப்பில் காண்க].



2A என்ற கோணமுடைய செங்கோண முக்கோணத்தில் எதிர்ப்பக்கம் '$2t$' ஆகுக. அடுத்த பக்கம் $1-t^2$ ஆகுக. அப்போது கர்ணம் $1+t^2$ ஆகும். இங்கு $t = \tan A$ ஆக.

$$\therefore \quad \tan 2A = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$$\therefore \quad \sin 2A = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

இவ்வாறு ஒரு கோணத்தின் சைன், கோசைன் டான்ஜண்டு விகிதங்களை, அரைக் கோணத்தின் டான்ஜண்டு விகிதங்களாகக் கூறுகிறோம். இவை முக்கிய சூத்திரங்களாகும்.

மாதிரி: sin 3 Aஐ Aன் சைன் விகிதத்தில் கூறுக.

$$\begin{aligned}\sin 3A &= \sin(2A + A)\\ &= \sin 2A\cos A + \cos 2A \sin A\\ &= 2\sin A\cos A + (1-2\sin^2 A)\sin A\\ &= 2\sin A(1-\sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

மாதிரி: cos 3 Aஐ Aன் கோசைன் விகிதத்தில் கூறுக.

$$\begin{aligned}\cos 3A &= \cos(2A + A)\\ &= \cos 2A\cos A - \sin 2A\sin A\\ &= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin A\cos A\sin A\end{aligned}$$

$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A\,(1 - \cos^2 A)$$

$$\therefore \quad \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$

மாதிரி: tan 3 Aஐ Aன் டான்ஜண்டு விகிதத்தில் கூறுக.

$$\begin{aligned}\sin 3A &= 3\sin A - 4\sin^3 A\\ &= 3\sin A - 3\sin^3 A - \sin 3A\\ &= 3\sin A\cos^2 A - \sin^3 A\\ &= \cos^3 A\,(3\tan A - \tan^3 A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3A &= 4\cos^3 A - 3\cos A\\ &= \cos^3 A + 3\cos^3 A - 3\cos A\\ &= \cos^3 A - 3\cos A\sin^2 A\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \cos 3A = \cos^3 A\,(1 - 3\tan^2 A)$$

$$\therefore \quad \tan 3A = \frac{\sin 3A}{\cos 3A} = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

மாற்று வழி:

$$\tan 3A = \tan(2A + A) = \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A;\ \tan A}$$

$$\tan 2A + \tan A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} + \tan A\ A\ \frac{2\tan A + \tan A - \tan^3 A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\therefore \tan 2A + \tan A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - \tan^2 A} \qquad \text{(i)}$$

$$1 - \tan 2A \cdot \tan A = 1 - \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A},\ \tan A$$

$$= \frac{1 - \tan^2 A - 2\tan^2 A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\therefore 1 - \tan 2A\tan A = \frac{1 - 3\tan^2 A}{1 - \tan^2 A} \qquad \text{(ii)}$$

(1) ÷ (ii)

$$\therefore \quad \tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

மாதிரி: sin 18° இன் மதிப்பைக் கணக்கிடு.

$18° = x$ ஆகுக.

$$\therefore \quad 5x = 90°$$

$$\therefore \quad 2x = 90 - 3x$$

$$\therefore \quad \sin 2x = \cos 3x$$

$$\therefore \quad 2 \sin x \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\therefore \quad 2 \sin x = 4 \cos^2 x - 3$$

$$= 4 - 4 \sin^2 x - 3$$

$$= 1 - 4 \sin^2 x$$

$$\therefore \quad 4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0$$

$$\therefore \quad \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{4}$$

$$\therefore \quad \sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad \therefore \quad \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

[x குறுங்கோணமானதால் $\sin x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ என்பது எடுபடாது]

மாதிரி : நிறுவுக.

$$\cos^8 A - \sin^8 A = \cos 2A - \tfrac{1}{4} \sin 2A \sin 4A \qquad \text{(M.U.)}$$

$$\cos^8 A - \sin^8 A = (\cos^4 + \sin^4 A)(\cos^4 A - \sin^4 A)$$

$$= [(\cos^2 A + \sin^2 A)^2 - 2 \cos^2 A \sin^2 A]$$

$$\times (\cos^2 A + \sin^2 A)(\cos^2 A - \sin^2 A)$$

$$= (1 - 2 \sin^2 A \cos^2 A) \cos 2A$$

$$= (1 - \tfrac{1}{2} \sin^2 2A) \cos 2A$$

$$= \cos 2A - \tfrac{1}{2} \sin^2 2A \cos 2A$$

$$= \cos 2A - \tfrac{1}{4} \sin 4A \sin 2A$$

$$\therefore \quad \cos^8 A - \sin^8 A = \cos 2A - \tfrac{1}{4} \sin 2A \sin 4A$$

மாதிரி : நிறுவுக.

$$= \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \tfrac{1}{16}$$

$$S = \cos 20 \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$$

$$\therefore \quad 2 \sin 20^\circ S = 2 \sin 20 . \cos 20^\circ . \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$$

$$= \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$$

$$= \tfrac{1}{2} \sin 80^\circ \cos 80^\circ \cos 60^\circ$$

$$= \tfrac{1}{4} \sin 160^\circ \cos 60^\circ$$

$$= \frac{\sin 20^\circ}{4} \times \tfrac{1}{2}$$

$$2 \sin 20^\circ \text{ S} = \frac{\sin 20^\circ}{8}$$

$$\therefore \text{ S} = \frac{1}{16}$$

பயிற்சி 25

A

(வாய்மொழி)

சுருக்குக :

1. $2 \sin 2A \cos 2A$
2. $2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$
3. $2 \sin 3\alpha \cos 3\alpha$
4. $2 \sin \frac{5\alpha}{2} \cos \frac{\theta}{2}$
5. $\sin \frac{7\alpha}{2} \cos \frac{7\alpha}{2}$
6. $\sin 5\alpha \cos 5\alpha$
7. $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$
8. $2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}$
9. $\sin 20^\circ \cos 20^\circ$
10. $\sin 75^\circ \cos 75^\circ$
11. $\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}$
12. $\cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha$
13. $2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$
14. $1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$
15. $1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{4}$
16. $1 + \cos \alpha$
17. $\cos A - 1$
18. $1 - \cos 8\alpha$
19. $1 - \cos 28^\circ$
20. $\cos \frac{3\pi}{4} - 1$

21. (i) $\sin \alpha = \frac{\beta}{5}$ (ii) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ (iii) $\tan = \frac{1}{2}$ என்றால் ஒவ்வொன்றிலும் $\sin 2\alpha$ என்ன ?

22. கீழே தரப்படுவனவற்றிலிருந்து $\cos 2\alpha$ காண்க.

(i) $\cos \alpha = \frac{5}{6}$ (ii) $\sin = \frac{1}{5}$

(iii) $\sin \alpha = -\frac{4}{7}$ (iv) $\tan = \frac{1}{3}$ (v) $\tan \alpha = -\frac{2}{3}$

23. $(\sin A + \cos A)^2 = 1 + \sin 2A$ என நிறுவுக.

24. $(\cos^4 A - \sin^4 A) = \cos 2A$ என நிறுவுக.

25. $(\sin^6 A + \cos^6 A) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2A$ என நிறுவுக.

26. $\tan \frac{\theta}{2} = t$ என்றால், (i) $2 \cos \theta + 3 \sin \theta$;

(ii) $5 + 4 \cos \theta$ (iii) $3 - 2 \cos \theta + 4 \sin \theta$

(iv) $4 + 5 \sin \theta - 4 \cos \theta$ என்பவற்றை t இன் சார்பலனைக் கூறுக.

7. கோண விகிதங்களின் பெருக்கற்பலனும் கூட்டுத்தொகையும்

(Transformation formulae)

7·1 பெருக்கற்பலனைக் கூட்டுத்தொகையாக்கல் :

(i) $2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

(ii) $2 \cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

(iii) $2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

(iv) $2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

நிரூபணம் :

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \qquad (i)$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \qquad (ii)$$

(i) + (ii)

$$\therefore \sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B$$

(i) − (ii)

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \qquad (iii)$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \qquad (iv)$$

(iv) + (iii)

$$\cos(A-B) + \cos(A+B) = 2 \cos A \cos B$$

(iv) − (iii)

$$\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2 \sin A \sin B$$

[குறிப்பு : மேற்கூறிய விதிகளைக் கீழ் வருமாறு நினைவு கூரலாம்.

(i) 2 sin () × cos () = சைன் கூடுதல் + சைன் வித்தியாசம்

(ii) 2 cos × sin = சைன் கூடுதல் — சைன் வித்தியாசம்

(iii) 2 cos × cos = கோசைன் வித்தியாசம் + கோசைன் கூடுதல்

(iv) 2 sin × sin = கோசைன் வித்தியாசம் —கோசைன் கூடுதல்].

மாதிரி : $2 \sin 7A \cos 4A = \sin 11A + \sin 3A$

[கூடுதல் $= 7A + 4A = 11A$; வித்தியாசம் $= 7A - 4A = 3A$ இதை மனதில் செய்யப் பழகவும். முடிவை உடனே எழுதப் பழகவும்].

மாதிரி : $\cos 3\theta \cos 6\theta = \frac{1}{2} [\cos 3\theta + \cos 9\theta]$

மாதிரி : $\sin 70^\circ \sin 20^\circ = \frac{1}{2} [\cos 50^\circ - \cos 90^\circ]$

$= \frac{1}{2} \cos 50$

பயிற்சி 26

(வாய்மொழி)

கோணவிகிதங்களின் கூட்டுத் தொகையாகவோ அல்லது வித்தியாசமாகவோ கூறுக.

1. $2 \sin A \cos B$ 2. $2 \sin B \cos A$ 3. $2 \cos A \cos B$
4. $2 \sin D \sin C$ 5. $2 \sin A \cos A$ 6. $2 \cos A \sin 4A$
7. $2 \cos 5A \sin 3A$ 8. $2 \cos 3A \cos 3A$ 9. $\sin 5\theta \cos 3\theta$
10. $\cos 2\theta \sin 3\theta$ 11. $\sin 7\theta \sin 3\theta$ 12. $\sin 9\theta \sin 11\theta$
13. $\cos 7a \cos 2a$ 14. $\sin 5a \sin 7a$ 15. $2 \cos 50^\circ \sin 40^\circ$
16. $2 \cos 50^\circ \sin 10^\circ$ 17. $\cos 40^\circ \sin 80^\circ$ 18. $\sin 40^\circ \sin 80^\circ$
19. $\cos 18^\circ \cos 12^\circ$ 20. $\cos 32^\circ \cos 55^\circ$ 21. $\sin 70^\circ \sin 10^\circ$
22. $2 \cos (A+B) \cos (A-B)$ 23. $2 \cos (x+2y) \sin (3x+4y)$
24. $2 \cos (A + B + C) \sin (A + B - C)$
25. $\sin (-A + B + C) \sin (A + B - C)$

26. sin (A + 2B) sin (2 A + B)

27. cos (A + 2C) cos (2 A + C).

7.2 கூட்டுத்தொகையைப் பெருக்கற் பலனுக்கல்.

$$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$$

$$\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B$$

$$\cos(A + B) - \cos(A - B) = -2 \sin A \sin B$$

எனக் கண்டோம்.

$A + B = C$ என்க;

$A - B = D$ என்க:

அப்போது $A = \frac{C+D}{2}$; $B = \frac{C-D}{2}$ என வருகிறது.

மேற்கூறிய சூத்திரங்களில் பிரதியிட

$$\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

$$\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$\cos C - \cos D = -2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$ அல்லது

$$2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{D-C}{2}$$

எனச் சூத்திரங்கள் வருகின்றன.

நடைமுறையில் கீழ்வருமாறு நினைவுகூரலாம்.

2 சைன்களின் கூடுதல் = 2 × சைன் பாதிக்கூடுதல் × கோசைன் பாதிவித்தியாசம்

2 சைன்களின் வித்தியாசம் = 2 × கோசைன் பாதிக்கூடுதல் × சைன் பாதிவித்தியாசம்

2 கோசைன்களின்கூடுதல் = 2 × கோசைன் பாதிக்கூடுதல் × கோசைன் பாதிவித்தியாசம்

2 கோசைன்களின் வித்தியாசம் $= 2 \times$ சைன் பாதிக்கூடுதல்
$\times$ சைன் பாதிவித்தியாசம்
குறியை மாற்றி.

[வித்தியாசம் என்ருல் முதற்கோணம்—2வது கோணமாகும்].

பயிற்சி 27

(வாய்மொழி)

பெருக்கற் பலனுக எழுதுக.

1. $\sin 4A + \sin 2A$
2. $\sin 5A + \sin 3A$
3. $\sin 5A - \sin 3A$
4. $\sin 7A + \sin 5A$
5. $\cos 9A + \cos 3A$
6. $\cos 3A + \cos 2A$
7. $\cos 3A + \cos A$
8. $\sin 3\theta + \sin 5\theta$
9. $\cos 10x - \cos 2x$
10. $\cos 5y - \cos 7y$
11. $\sin 3x - \sin 7x$
12. $\sin \frac{3\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2}$
13. $\cos 12^\circ + \cos 6^\circ$
14. $\cos 58^\circ + \cos 18^\circ$
15. $\sin 48^\circ + \sin 42^\circ$
16. $\sin 65^\circ - \sin 5^\circ$
17. $\cos 32^\circ + \sin 28^\circ$
18. $\sin 32^\circ - \sin 28^\circ$
19. $\sin 42^\circ - \cos 128^\circ$
20. $\sin 72^\circ + \cos 78^\circ$

7·3 கடினமான கணக்குகள்:

மாதிரி: $$\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x} = \tan 4x$$
என நிறுவுக.

தொகுதி $= (\sin x + \sin 3x) + (\sin 5x + \sin 7x)$

$= 2\sin 2x \cos x + 2\sin 6x \cos x$

$= 2\cos x\,[\sin 2x + \sin 6x]$

$= 2\cos x \cdot 2\sin 4x \cos 2x$

$= 4\cos x \cos 2x \sin 4x.$

$$\text{பகுதி} = (\cos x + \cos 3x) + (\cos 5x + \cos 7x)$$
$$= 2\cos 2x \cos x + 2\cos 6x \cos x$$
$$= 2\cos x(\cos 2x + \cos 6x)$$
$$= 2\cos x \, 2\cos 4x \cos 2x$$
$$= 4\cos x \cos 2x \cos 4x$$

$$\therefore \quad \text{இடதுபக்கம்} = \frac{\text{தொகுதி}}{\text{பகுதி}} = \frac{4\cos x \cos 2x \sin 4x}{4\cos x \cos 2x \cos 4x} = \tan 4x$$

மாதிரி: $\sin A + \sin\left(A + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(A + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$ என நிறுவுக.

$$\sin A + \sin\left(A + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(A + \frac{4\pi}{3}\right)$$
$$= 2\sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3} + \sin\left(A + \pi + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 2\sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{2} - \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 0$$

மாதிரி: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C - \sin(2A + 2B + 2C) = 4\sin(A+B)\sin(B+C)\sin(C+A)$ எனக் காட்டு.

$$\text{இடதுபக்கம்} = (\sin 2A + \sin 2B) + \{\sin 2C - \sin(2A+2B+2C)\}$$
$$= 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\cos(2C+A+B)\sin(-A-B)$$
$$= 2\sin(A+B)\cos(A-B) - 2\cos(2C+A+B)\sin(A+B)$$
$$= 2\sin(A+B)\{\cos(A-B) - \cos(2C+A+B)\}$$
$$4\sin(A+B)\sin(B+C)\sin(C+A)$$

பயிற்சி 28

நிறுவுக:

1. $2\sin 5A \cos A + 2\cos 6A \sin 2A = \sin 8A + \sin 6A$
2. $2\cos 3A \sin A + 2\sin\frac{3A}{2}\cos\frac{A}{2} = \sin 4A + \sin A$

8. முற்றொருமைகள்
(Identities)

8·1 ABC என்ற முக்கோணத்தின் கோணங்கள் A, B, C ஆகும். அப்போது $A + B + C = 180°$ அல்லது π ரேடியன் என்பதை நாம் அறிவோம். ஆகவே அவற்றுள் இரண்டு கோணங்களின் கூடுதலும், மூன்றாவது கோணமும் ஒன்றற்கொன்று மிகை நிரப்பு கோணமாகும்.

$$\therefore \quad \sin (B + C) = \sin A$$
$$\cos (B + C) = -\cos A$$
$$\tan (B + C) = -\tan A$$

பயிற்சி 30
(வாய்மொழி)

$A + B + C = 180°$ என்றால் ஒரு கோணத்தின் கோண விகிதங்களாகக் கூறுக.

1. $\sin (C + A)$	2. $\cos (A + B)$	3. $\tan (A + B)$
4. $\sec (A + B)$	5. $\text{cosec} (B + A)$	6. $\cot (B + C)$
7. $\cos (C + B)$	8. $\sin (B + C)$	9. $\cot (A + B)$
10. $\sec (B + C)$	11. $\text{cosec} (C + A)$	12. $\cot (C + A)$
13. $\text{cosec} (C+A)$	14. $\sec (A + B)$	15. $\tan (B + C)$

இரண்டு கோணக் கூடுதலின் கோண விகிதங்களாகக் கூறுக.

16. $\sin A$	17. $\cos B$	18. $\cot C$
19. $\text{cosec}\, C$	20. $\sec A$	21. $\tan B$

12. $\cos(\alpha+\beta+r)+\cos(\alpha+\beta-r)+\cos(\alpha-\beta+r)$
$+\cos(-\alpha+\beta+r) = 4\cos\alpha\cos\beta\cos r$

13. $\sin(-A+B+C)+\sin(A-B+C)+\sin(A+B-C)$
$-\sin(A+B+C) = 4\sin A\sin B\sin C$

14. $\sin(A+B+C)+\sin(A+B-C)+\sin(A-B+C)$
$-\sin(-A+B+C) = 4\sin A\cos B\cos C$

15. $\cos A + \cos B + \cos C + \cos(A+B+C)$
$= 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}$

16. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+\cos^2(A+B+C)$
$= 2[1+\cos(A+B)\cos(B+C)\cos(C+A)]$

17. $\sin(y-z)+\sin(z-x)+\sin(x-y)+$
$4\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{y-z}{2}\right)\sin\left(\frac{z-x}{2}\right)=0$

18. $\cos A+\cos(A+120^\circ)+\cos(A+240^\circ) = 0$

19. $\cos^2 A+\cos^2(A+120^\circ)+\cos^2(A-120^\circ)=\frac{3}{2}$

20. $\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}=0$

8. முற்றொருமைகள்
(Identities)

8·1 ABC என்ற முக்கோணத்தின் கோணங்கள் A, B, C ஆகும். அப்போது $A + B + C = 180°$ அல்லது π ரேடியன் என்பதை நாம் அறிவோம். ஆகவே அவற்றுள் இரண்டு கோணங்களின் கூடுதலும், மூன்றாவது கோணமும் ஒன்றற்கொன்று மிகை நிரப்பு கோணமாகும்.

$$\therefore \sin(B+C) = \sin A$$
$$\cos(B+C) = -\cos A$$
$$\tan(B+C) = -\tan A$$

பயிற்சி 80
(வாய்மொழி)

$A + B + C = 180°$ என்றால் ஒரு கோணத்தின் கோண விகிதங்களாகக் கூறுக.

1. $\sin(C+A)$	2. $\cos(A+B)$	3. $\tan(A+B)$
4. $\sec(A+B)$	5. $\operatorname{cosec}(B+A)$	6. $\cot(B+C)$
7. $\cos(C+B)$	8. $\sin(B+C)$	9. $\cot(A+B)$
10. $\sec(B+C)$	11. $\operatorname{cosec}(C+A)$	12. $\cot(C+A)$
13. $\operatorname{cosec}(C+A)$	14. $\sec(A+B)$	15. $\tan(B+C)$

இரண்டு கோணக் கூடுதலின் கோண விகிதங்களாகக் கூறுக.

16. $\sin A$	17. $\cos B$	18. $\cot C$
19. $\operatorname{cosec} C$	20. $\sec A$	21. $\tan B$

22. sin C 23. cosec A 24. cos C
25. sec B 26. tan C 27. cot A
28. cos A 29. cot B 30. sec C.

8·2 முக்கோணம் ABCயில் $A+B+C = 180°$

$$\therefore \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90°$$

$$\therefore \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\left(90 - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$$

இவ்வாறே $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$

$$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$$

பயிற்சி 31
(வாய்மொழி)

$A+B+C = 180°$ என்றால் அவற்றுள் ஒரு கோணத்தின் பாதியின் விகிதமாகக் கூறுக.

1. $\sin\frac{A+B}{2}$ 2. $\cos\frac{B+C}{2}$ 3. $\cot\frac{C+A}{2}$ 4. $\operatorname{cosec}\frac{B+C}{2}$

5. $\sec\frac{C+A}{2}$ 6. $\tan\frac{B+C}{2}$ 7. $\cos\frac{C+A}{2}$ 8. $\sin\frac{B+C}{2}$

9. $\cot\frac{A+B}{2}$ 10. ccsec $\frac{C+A}{2}$ 11. $\tan\frac{B+C}{2}$ 12. $\sin\frac{C+A}{2}$

13. $\cos\frac{A+B}{2}$ 14. $\cot\frac{B+C}{2}$ 15. $\sec\frac{A+B}{2}$.

இரண்டு அரைக் கோணங்களின் கூடுதலாகக் கூறுக.

16. $\sin\frac{B}{2}$ 17. $\cos\frac{A}{2}$ 18. $\cot\frac{C}{2}$ 19. $\operatorname{cosec}\frac{A}{2}$

20. $\sec\frac{C}{2}$ 21. $\tan\frac{B}{2}$ 22. $\cos\frac{C}{2}$ 23. $\sin\frac{A}{2}$

24. $\operatorname{cosec}\frac{B}{2}$ 25. $\cot\frac{A}{2}$ 26. $\sin\frac{C}{2}$ 27. $\cos\frac{B}{2}$

28. $\operatorname{cosec}\frac{C}{2}$ 29. $\tan\frac{A}{2}$ 30. $\cot\frac{B}{2}$

கடின கணக்குகள்

$A + B + C = 180^\circ$ என்றால்

$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$ எனக் காட்டு.

$$4 \sin A \sin B \sin C$$

$$= 2 \sin A \; 2 \sin B \sin C$$

$$= 2 \sin A \, [\cos (B-C) - \cos (B+C)]$$

$$= 2 \sin A \cos \overline{B-C} - 2 \cos \overline{B+C} \sin A$$

$$= [\sin (A+B-C) + \sin (A-B+C)] - [\sin (B+C+A) - \sin \overline{B+C-A}]$$

$$= \sin (180-2C) + \sin (180-2B) - \sin 180^\circ + \sin (180-2A)$$

$$= \sin 2C + \sin 2B - 0 + \sin 2A$$

$$= \sin 2A + \sin 2B + \sin 2A$$

மாற்று வழி :

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$$

$$= [\sin 2A + \sin 2B] + \sin 2C$$

$$= 2 \sin \overline{A+B} \cos \overline{A-B} + 2 \sin C \cos C$$

$$= 2 \sin C \cos \overline{A-B} + 2 \sin C (- \cos \overline{A+B})$$

$$= 2 \sin C [\cos \overline{A-B} - \cos \overline{A+B}]$$

$$= 2 \sin C \cdot 2 \sin A \sin B$$

$$= 4 \sin A \sin B \sin C$$

மாதிரி: $A+B+C = 180^\circ$ என்றால்

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$ என நிறுவுக.

$$4\cos A \cos B \cos C$$
$$= 2\cos A \cdot 2\cos B \cos C$$
$$= 2\cos A [\cos \overline{B-C} + \cos \overline{B+C}]$$
$$= 2\cos A \cos \overline{B-C} + 2\cos \overline{B+C} \cos A$$
$$= \cos \overline{A-B+C} + \cos \overline{A+B-C} + \cos \overline{B+C-A} + \cos \overline{B+C+A}$$
$$= \cos \overline{180-2B} + \cos \overline{180-2C} + \cos \overline{180-2A} + \cos 180^\circ$$
$$= -\cos 2B - \cos 2C - \cos 2A - 1$$
$$= -[2\cos^2 B - 1 + 2\cos^2 C - 1 + 2\cos^2 A - 1 + 1]$$
$$= -2\cos^2 A - 2\cos^2 B - 2\cos^2 C + 2$$

$$\therefore \cos^2 A + \cos^2 + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \text{ ces } C$$

மாற்று வழி:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 1$$
$$= \cos^2 A + \cos^2 B - \sin^2 C$$
$$= \cos^2 A + \cos \overline{B+C} \cos \overline{B-C}$$
$$= \cos^2 A - \cos A \cos B - C$$
$$= \cos A [\cos A - \cos \overline{B-C}]$$
$$= -\cos A [\cos \overline{B+C} + \cos \overline{B-C}]$$
$$= -2\cos A \cos B \cos C$$
$$\therefore \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$$

குறிப்பு: $\cos^2 A - \sin^2 B = \cos \overline{A+B} \cos \overline{A-B}$
$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin \overline{A+B} \sin \overline{A-B}$ எனும் சூத்திரங்களை இத்தகைய கணக்குகளில் பயன்படுத்தல் நலம்].

மாதிரி: $A+B+C = 180°$ என்றால்

$\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin A \cos B \sin C$ என நிறுவுக.

$$\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = \sin \overline{A+B} \sin \overline{A-B} + \sin^2 C$$
$$= \sin C \sin \overline{A-B} + \sin^2 C$$
$$= \sin C [\sin \overline{A-B} + \sin \overline{A+B}]$$
$$= 2 \sin C \sin A \cos B$$
$$= 2 \sin A \cos B \sin C.$$

பயிற்சி 32

$A+B+C = 180°$ என்றால் கீழ்வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. $\sin 2B + \sin 2C - \sin 2A = 4 \sin A \cos B \cos C$
2. $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4 \cos A \sin B \cos C$
3. $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4 \cos A \cos B \sin C$
4. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 1-4 \cos A \cos B \cos C$
5. $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1-4 \sin A \sin B \cos C$
6. $\cos 2A - \cos 2B + \cos 2C = 1-4 \sin A \cos B \sin C$
7. $\cos 2B + \cos 2C - \cos 2A = 1-4 \cos A \sin B \sin C$
8. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2+2 \cos A \cos B \cos C$
9. $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C$
10. $\sin^2 C + \sin^2 B - \sin^2 A = 2 \cos A \sin B \sin C$
11. $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1-2 \sin A \sin B \cos C$
12. $\cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C = 2 \cos A \sin B \sin C-1$

மாதிரி: $A+B+C = 180°$ என்றால்

$4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = -1 + \cos A + \cos B + \cos C$ எனக் காட்டு.

$$4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$
$$= 2 \sin \frac{A}{2}\, 2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{A}{2} \left[\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2} \right]$$

$$= 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{A}{2}$$

$$= \left[\sin \frac{A+B-C}{2} + \sin \frac{A-B+C}{2} \right]$$

$$- \left[\sin \frac{B+C+A}{2} - \sin \frac{B+C-A}{2} \right]$$

$$= \sin (90-C) + \sin (90-B) - \sin 90^\circ + \sin (90-A)$$

$$= \cos C + \cos B - 1 + \cos A$$

$$= -1 + \cos A + \cos B + \cos C$$

[$-1+\cos A + \cos B + \cos C$யிலிருந்து $4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ எனவும் காட்டலாம்.]

பயிற்சி 33

$A+B+C = 180^\circ$ என்றால் கீழ் வருவனவற்றை நிறுவுக.

1. $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

2. $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

3. $\sin A - \sin B + \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

4. $\sin B + \sin C - \sin A = 4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

5. $1 + \cos A + \cos B - \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

6. $1 + \cos A - \cos B + \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

7. $1 - \cos A + \cos B + \cos C = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

8. $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}$

$$= 2 + 2\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2}$$

9. $\sin A\cos(B-C) + \sin B\cos(C-A) + \sin C\cos(A-B)$

$$= \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$$

10. $$\frac{\sin 2A + \sin 2B\sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B\sin 2C} = \tan A\tan B$$

11. $$\frac{\cos A + \cos B + \cos C - 1}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \tan\frac{A}{2}\ \tan\frac{B}{2}$$

12. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$

13. $$\frac{\tan A + \tan B + \tan C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{2\cos A\cos B\cos C}$$

14. $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

15. A, B, C, D ஒரு நாற்கரத்தின் கோணங்கள் என்றால்

$$\frac{\tan A + \tan B + \tan C + \tan D}{\cot A + \cot B + \cot C + \cot C} = \tan A\tan B\ \tan C\tan D$$

மாதிரி: $A + B + C = O$ என்றால்

$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 4\cos A\cos B\cos C$ எனக் காட்டு.

$$4\cos A\cos B\cos C$$

$$= 2\cos A\ 2\cos B\cos C$$

$$= 2\cos A\ [\cos\overline{B+C} + \cos\overline{B-C}]$$

$$= 2\cos A\cos\overline{B-C} + 2\cos\overline{B+C}\cos A$$

$$= \cos\overline{A+B-C} + \cos\overline{A-B+C} + \cos\overline{B+C-A}$$

$$\cos\overline{B+C+A}$$

$$= \cos(-2C) + \cos(-2B) + \cos(-2A)$$

$$+ \cos O\ [\because A + B + C = 0°]$$

$$= \cos 2C + \cos 2B + \cos 2A + 1$$

பயிற்சி 34

$A + A C = 360°$ ஆனால்

1. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C + 4 \sin A \sin B \sin C = O$
2. $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 + 4 \sin A \sin B \cos C$
3. $\cos 2A - \cos 2B + \cos 2C = 1 + 4 \sin A \cos B \sin C$
4. $\sin 2A - \sin 2B - \sin 2C = 4 \sin A \cos B \cos C$
5. $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C + 4 \cos A \cos B \sin C = O$

8·3 முக்கோணத்தின் பக்கங்கள், கோணங்கள் இவை பற்றிய கணக்குகள்.

இங்கு 5வது அத்தியாயத்தில் கூறப்பட்டுள்ள சூத்திரங்களும், பின்னர் கூறப்பட்டுள்ள சூத்திரங்களும் பயன்படும்.

ABC என்ற முக்கோணத்தில்

1. $\tan \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \tan \frac{B + C}{2}$

$$\frac{b - c}{b + c} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} \quad \left[\because \begin{array}{l} b = 2R \sin B \\ c = 2R \sin C \end{array}\right]$$

$$= \frac{2 \cos \frac{B + C}{2} \sin \frac{B - C}{2}}{2 \sin \frac{B + C}{2} \cos \frac{B - C}{2}}$$

$$= \cot \frac{B + C}{2} \tan \frac{B - C}{2}$$

$$\therefore \frac{b - c}{b + c} = \frac{\tan \frac{B - C}{2}}{\tan \frac{B + C}{2}}$$

$$\therefore \tan \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \tan \frac{B + C}{2}$$

குறிப்பு 1: இந்தச் சூத்திரம் பின்னர் பயன்படுத்தப்படும்.

குறிப்பு 2: $\frac{B+C}{2} = 90 - \frac{A}{2}$ ஆனதால்

$$\tan \frac{B+C}{2} = \cot \frac{A}{2}$$

ஆகவே $\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}$

என வருகிறது.

8·4 முக்கோணம் ABC யில்

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\cos A = \frac{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}}$$

$$\therefore \frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \tan^2 \frac{A}{2}$$

$$\therefore \tan^2 \frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{1+\cos A}$$

$$= \frac{2bc - 2bc\cos A}{2bc + 2bc\cos A}$$

$$= \frac{2bc - (b^2 + c^2 - a^2)}{2bc + (b^2 + c^2 - a^2)}$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{(b+c)^2 - a^2}$$

$$= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(b+c+a)(b+c-a)}$$

$$= \frac{(2s-2b)(2s-2c)}{2s(2s-2a)}$$

$$\therefore \tan^2 \frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}$$

$$\therefore \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

இதேபோல

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

$$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

8·5 $$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\therefore\quad 2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A$$

$$\therefore\quad 4\,bc\sin^2\frac{A}{2} = 2\,bc - 2\,bc\cos A$$

$$= 2\,bc - (b^2 + c^2 - a^2)$$

$$= a^2 - (b-c)^2$$

$$= (a-b+c)(a+b-c)$$

$$= (2s - 2b)(2s-2c)$$

$$= 4(s-b)(s-c)$$

$$\therefore\quad \sin^2\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{b\,c}$$

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{b\,c}}$$

8·6 $$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{b\,c}}$$

$$2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A$$

$$\therefore\quad 4\,bc\cos^2\frac{A}{2} = 2bc + 2\,bc\cos A = 2\,bc + b^2 + c^2 - a^2$$

$$\therefore\quad 4\,bc\cos^2\frac{A}{2} = (b+c)^2 - a^2$$

$$= (b+c+a)(b+c-a)$$

$$= 2\,s\cdot(2\,s - 2\,a)$$

$$= 4\,s\,(s-a)$$

$$\therefore \quad \cos^2\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}$$

$$\therefore \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

இதேபோல :

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\ ; \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\ ; \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

8·7 $\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$$

$$= 2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$= \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

8·8 $\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\, bc \sin A$$

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\, bc\, \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

மாதிரி :

$\triangle$ ABC யில் $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B + \sin C} + \frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C + \sin A} + \frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A + \sin B} = 0$

எனக் காட்டு.

$$\frac{a^2 \sin(B-C)}{\sin B + \sin C} = \frac{a\, 2R \sin A \sin(B-C)}{\sin B + \sin C}$$

$$= \frac{2Ra \cdot \sin(B+C) \sin(B-C)}{\sin B + \sin C}$$

$$= \frac{4R^2 \cdot \sin A [\sin^2 B - \sin^2 C]}{\sin B + \sin C}$$

$$= 4R^2 \sin A \; [\sin B - \sin C]$$

$$\therefore \sum \frac{a^2 \sin(B-C)}{\sin B + \sin C} = 4R^2 \sum \sin A (\sin B - \sin C)$$

$$= 0$$

மாதிரி: $a \cos A = b \cos B$ என்றால் முக்கோணம் ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணம் அல்லது செங்கோண முக்கோணம் எனக்காட்டு.

$$a \cos A = b \cos B$$

$$\therefore 2R \sin A \cos A = 2R \sin B \cos B$$

$$\therefore \sin 2A = \sin 2B$$

$$\therefore 2A = 2B \text{ அல்லது } 180^\circ - 2B$$

$$\therefore A = B \text{ அல்லது } A = 90^\circ - B$$

∴ முக்கோணம் இரு சமபக்க முக்கோணம் அல்லது ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ஆகும்.

பயிற்சி 85

△ ABC யில் கீழ்வருவனவற்றை நிறுவு.

1. $\frac{b-c}{c} \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{B-C}{2}$

2. $\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \frac{b^2 - c^2}{a^2}$

3. $a \sin(B-C) + b \sin(C-A) + C \sin(A-B) = 0$

4. $\frac{b^2-c^2}{a^2} \sin 2\text{A} + \frac{c^2-a^2}{b^2} \sin 2\text{B} + \frac{a^2-b^2}{c^2} \sin 2\text{C} = 0$

5. $\frac{a \sin(\text{B}-\text{C})}{b^2-c^2} = \frac{b \sin(\text{C}-\text{A})}{c^2-a^2} = \frac{c \sin(\text{A}-\text{B})}{a^2-b^2}$

6. $a^3 \sin(\text{B}-\text{C}) + b^3 \sin(\text{C}-\text{A}) + c^3\ (\text{A}-\text{B}) = 0$

7. $\frac{b^2-c^2}{a} \cos \text{A} + \frac{(c^2-a^2)}{b} \cos \text{B} + \frac{(a^2-b^2) \cos \text{C}}{c} = 0$

8. $c \sin\left(\frac{\text{C}}{2} + \text{A}\right) = (a+b) \sin \frac{\text{C}}{2}$

9. $(b-c) \cos \frac{\text{A}}{2} = a \sin \frac{\text{C}}{2}$

10. $(b+c) \sin \frac{\text{A}}{2} = a \cos \frac{\text{B}-\text{C}}{2}$

9 (i) முக்கோணங்களின் உறுப்புக்களைக் கணக்கிடல்

(Solution of Triangles)

9·1 ஒரு முக்கோணத்திற்கு 3 பக்கங்கள் 3 கோணங்கள் என 6 உறுப்புக்கள் உள்ளன. இவற்றுள் ஒரு பக்கமாகிலும் அடங்கிய 3 உறுப்புக்கள் தரப்பட்டால், ஏனைய மூன்று உறுப்புக்களைப் படம் வரைந்து காணும் முறையைக் கீழ் வகுப்புக்களில் படித்திருப்பீர்கள். அவை பின் வருமாறு

(1) ஒரு பக்கமும், 2 கோணங்களும்.

(2) இரண்டு பக்கங்களும் அவை உள்ளடக்கும் கோணமும்.

(3) மூன்று பக்கங்கள்.

(4) 2 பக்கங்களும், ஒரு பக்கத்தின் எதிர்க் கோணமும் (ஈரடிவகை)

இங்கு படம் வரையாமல் கணக்கிட்டுக் காணும் முறையை விளக்குவோம்.

9·2 ஒரு பக்கமும் 2 கோணங்களும்

பொது முறை: ABC யில் a, B, C தரப்பட்டால் A, b, c இவை வேண்டும்.

இதற்கான சூத்திரம்

(i) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

(ii) $A+B+C=180^\circ$ ஆவதால் $A = 180^\circ-(B+C)$ என A என்ற கோணத்தைக் காணலாம்.

$$\therefore\ b = \frac{a \sin B}{\sin A} \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

$$\therefore\ \log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A$$

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$$

இவ்வாறு b, c ஐக் கணக்கிடமுடியும்.

குறிப்பு 1 : $\log b = (\log a - \log \sin A) + \log \sin B$

$\log c = (\log a - \log \sin A) + \log \sin C$

ஆவதால் $\log c$ ஐக் காணும்போது $\log b$ யில் கண்டுள்ள $(\log a - \log \sin A)$ உடன் $\log \sin C$ ஐக் கூட்டினால் போதும்.

மாதிரி: ABC என்ற முக்கோணத்தில்
$a = 34 \cdot 8$, $B = 72^\circ\ 18'$ $C = 62^\circ\ 36'$
என்றால் பக்கங்களைக் கணக்கிடுக.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$B = 72^\circ\ 18'$

$C = 62^\circ\ 36'$

$\therefore\ A = 45^\circ\ 6'$ $\quad (\because\ A + B + C = 180^\circ)$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

$$\therefore\ \log b = \log a - \log \sin A + \log \sin B$$

$$\therefore\ b = \frac{34{\cdot}8 \times \sin 72^\circ\ 18'}{\sin 45^\circ\ 16'}$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

$$\log c = \log a - \log \sin A + \log \sin C$$

$$c = \frac{34{\cdot}8 \times \sin 62^\circ\ 36'}{\sin 45^\circ\ 16'}$$

$\log\ 34 \cdot 8 = 1 \cdot 5416$

$(-) \log \sin 45^\circ\ 6' = \bar{1} \cdot 8502$

$1 \cdot 6914$ $\qquad\qquad 1 \cdot 6914$

$(+) \log 72^\circ\ 18' = \bar{1} \cdot 9789$ $\qquad \log \sin 62^\circ\ 36' = \bar{1} \cdot 9483$

$\log b = 1 \cdot 6703$ $\qquad \log c = 1 \cdot 6397$

$\therefore\ b = 46 \cdot 80$ $\qquad c\ \ 43 \cdot 52$

மாதிரி: A = 38° 34′ B = 42° 18′

பக்கம் $c = 24 \cdot 7$ என்றால், மற்ற உறுப்புக்களைக் கணக்கிடு.

A = 38° 34′

B = 42° 18′

C = 99° 8′

$\therefore \sin C = \sin 99° 8' = \sin 80° 52'$

$$a = \frac{c}{\sin C} \sin A$$

$$= \frac{24 \cdot 7}{\sin 80° 52'} \sin 38° 34'$$

$\log 24 \cdot 7 = 1 \cdot 4099$

$(-) \log \sin 80° 52' = \bar{1} \cdot 9945$

$1 \cdot 4154$

$(+) \log \sin 38° 34' = \bar{1} \cdot 7947$

$\log a = 1 \cdot 2101$

$\therefore a = 16 \cdot 22$

$$b = \frac{c}{\sin C} \sin B$$

$$= \frac{24 \cdot 7}{\sin 80° 51'} \sin 42° 18'$$

$1 \cdot 4154$

$(+) \log \sin 42° 18' = \bar{1} \cdot 8280$

$\log b = 1 \cdot 2434$

$\therefore b = 17 \cdot 52$

பயிற்சி 34

கீழே தரப்படும் முக்கோணங்களின் ஏனைய உறுப்புக்களைக் கணக்கிட்டுக் காண்க.

1. A = 58° 18′, B = 37° 42′, $c = 42 \cdot 8$
2. B = 72° 54′, C = 28° 40′, $a = 548$
3. C = 37° 42′, B = 41° 14, $a = 98 \cdot 2$
4. A = 54° 8′, B = 22° 32′, $c = 375$
5. $a = 5 \cdot 72$, A = 75° 54′, B = 64° 32′
6. $a = 20$, B = 60°, C = 75°

II. இரண்டு பக்கங்களும் அவை உள்ளடக்கும் கோணமும் தரப்பட்டால், மற்ற இரண்டு கோணங்களையும் மூன்றுவது பக்கத்தையும் கணக்கிடல்.

9·3 இங்குப் பயன்படும் சூத்திரம்

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \tan \frac{B+C}{2}$$

இதை முன்னரே நிறுவியுள்ளோம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள பக்கங்களுக் கேற்ப இதை மாற்றிக் கொள்ளவேண்டும். B, C என்பதில் B பெரிய கோணமாக இருக்கவேண்டும், அதாவது b, c ஐ விடப் பெரிது.

மாதிரி: ABC என்ற முக்கோணத்தில் $b = 98{\cdot}5$, $c = 115$ $A = 68° 36'$ என்றல் மற்ற உறுப்புக்களைக் கணக்கிடு.

இங்கு $c > b$ என ஆவதால் சூத்திரம்

$$\tan \frac{C-B}{2} = \frac{c-b}{c+b} \tan \frac{C+B}{2}$$ ஆகும்.

$$A = 68° 36'$$

$$\therefore\ C+B = 111° 24' \qquad \therefore\ \frac{C+B}{2} = 55° 42'$$

$$c = 115 \qquad \therefore\ c-b = 16{\cdot}5$$

$$b = 98{\cdot}5 \qquad c+b = 213{\cdot}5$$

சூத்திரத்தில் பிரதியிட $\tan \frac{C-B}{2} = \frac{16{\cdot}5}{213{\cdot}5} \tan 55° 42'$

$$\log 16{\cdot}5 = 1{\cdot}2175$$

$$(+)\ \log \tan 55° 42' = 0{\cdot}1661$$

$$1{\cdot}3836$$

$$(-)\ \log 213{\cdot}5 = 2{\cdot}3294$$

$$\log \tan \frac{C-B}{2} = \bar{1}{\cdot}0542$$

$$\therefore\ \frac{C-B}{2} = 6° \cdot 4'$$

ஆனல் $\frac{C+B}{2} = 55° 42'$

$$\therefore \quad C = 61^\circ\, 46'$$

$$B = 49^\circ\, 38'$$

$$a = \frac{b}{\sin B} \sin 68^\circ\, 36'$$

$$= \frac{98{\cdot}5}{\sin 49^\circ\, 38'} \sin 68^\circ\, 36'$$

$$\log 98{\cdot}5 = 1{\cdot}9934$$

$$(+) \log \sin 68^\circ\, 36' = \bar{1}{\cdot}9690$$

$$1{\cdot}9624$$

$$(-) \log \sin 49^\circ\, 38' = \bar{1}{\cdot}8819$$

$$\log a = 2{\cdot}0805$$

$$\therefore \quad a = 120{\cdot}3$$

பயிற்சி 35

முக்கோணத்தின் எஞ்சிய உறுப்புக்களைக் கணக்கிடு.

1. $a = 135{\cdot}7$, $b = 175{\cdot}8$, $\angle C = 64^\circ\, 36'$

2. $a = 51{\cdot}62$, $b = 72{\cdot}04$, $C = 40^\circ\, 30'$

3. $c = 148{\cdot}3$, $b = 175{\cdot}8$, $A = 47^\circ\, 20'$

4. $a = 257$, $b = 402$, $C = 102^\circ\, 28'$

5. இரண்டு பக்கங்களின் விகிதம் 5 : 3 அவை உள்ளடக்கும் கோணம் 48° 16′ என்ருல் மற்ற கோணங்களைக் கணக்கிடுக.

6. $a = 49^\circ\, 8 \quad b = 49^\circ\, 8 \quad c = 78^\circ\, 48'$

[இங்கு $a-b=0$ ஆனதால் சூத்திரம் பயன்படாது. ஆனுல் $A=B$ எனத் தெரிகிறது. பிறகு பக்கம் c ஐக் கணக்கிடு.]

7. $c = 1400 \quad b = 1300 \quad A = 60^\circ$

8. $\angle C = 102^\circ\, 51, \quad a = 88 \cdot 5, \quad b = 77 \cdot 3$

9. $\angle A = 99^\circ\, 37' \quad b = 38 \cdot 4, \quad c = 42 \cdot 8$

10. $\angle B = 74^\circ\, 45' \quad c = 72 \cdot 8, \quad a = 83 \cdot 4$

III. மூன்று பக்கங்கள் தரப்பட்டால் மூன்று கோணங்களைக் கணக்கிடல்.

9·4 பொது முறை: முக்கோணம் ABCயில், a, b, c என்ற பக்கங்கள் தரப்பட்டால், A, B, C என்ற கோணங்களைக் காணப் பயன்படும் சூத்திரங்கள்

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \quad \tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

இவற்றிலிருந்து A, Bயைக் காணலாம். A + B + C = 180° ஆகையால் C = 180 − (A + B) என Cயும் வரும்.

சூத்திரங்களிலிருந்து

$$\log\tan\frac{A}{2} = \tfrac{1}{2}[(\log(s-b)+\log(s-c)-(\log s+\log(s-a)]$$

$$\log\tan\frac{B}{2} = \tfrac{1}{2}[(\log(s-a+\log(s-c)-\{\log s+\log(s-b)\}]$$

மாதிரி: ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 130, 123, 77 என்றால் அதன் கோணங்களைக் கணக்கிடுக.

$$s = 165$$

$$\begin{array}{ll} a = 130 & s - a = 35 \\ b = 123 & s - b = 42 \\ c = 77 & s - c = 88 \\ \therefore\ 2s = 330 & \quad 330 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \log(s-b) = 1\cdot6232 & \log s = 2\cdot2175 \\ \log(s-c) = 1\cdot9445 & \log(s-a) = 1\cdot5441 \\ 3\cdot5677 & 3\cdot7616 \end{array}$$

$$\therefore\ \log\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\left[3\cdot5677 - 3\cdot7616\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\bar{1}\cdot8061\right] = \bar{1}\cdot90305$$

$$\frac{A}{2} = 38^\circ\ 39' \qquad \therefore \quad A = 77^\circ\ 18'$$

$$\log(s-a) = 1\cdot5441 \quad \log s = 2\cdot2175$$

$$\log(s-c) = 1\cdot9445 \quad \log(s-b) = 1\cdot6232$$

$$3\cdot4886 \qquad\qquad 3\cdot8407$$

$$\therefore \quad \log\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{2}\left[3\cdot4886 - 3\cdot8407\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\bar{1}\cdot6479\right]$$

$$= \bar{1}\cdot82395$$

$$\therefore \quad \frac{B}{2} = 33^\circ\ 42'$$

$$\therefore \quad B = 67^\circ\ 24'$$

$$\therefore \quad A = 77^\circ\ 18; \quad B = 67^\circ\ 24' \quad \therefore \quad C = 35^\circ\ 18$$

[**குறிப்பு :** இந்த முறையில், A அல்லது B என்ற கோணங்களில் பிழை நேர்ந்தால் C யின் மதிப்பிலும் பிழை நேரும். மாற்று முறை ஒன்றைப் பிற்கோப்பில் காண்க]

பயிற்சி 36

கீழே தரப்படும் முக்கோணங்களின் கோணங்களைக் காண்க.

1. $a = 182\cdot5 \quad b = 82\cdot5 \quad c = 115$
2. $a = 7\cdot53 \quad b = 3\cdot75 \quad c = 8\cdot72$
3. $a = 345 \quad b = 456 \quad c = 567$
4. $a = 68 \quad b = 51 \quad c = 85$
5. $a = 68\cdot4 \quad b = 92\cdot6 \quad c = 71\cdot4$
6. $a = 296 \quad b = 352 \quad c = 432$
7. $a = 34\cdot5 \quad b = 45\cdot6 \quad c = 56\cdot7$

பயிற்சி 37

(பலவகைக் கணக்குகள்)

1. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 12 : 11 : 7 என்ற விகிதத்தில் இருந்தால் அதன் கோணங்களைக் கணக்கிடுக.

2. ஒரு ஆற்றின் கரையோரத்தில் A B எனும் இரு இடங்கள் 180 அடி தூரத்தில் இருக்கின்றன. C என்பது எதிர்க்கரையில் ஓரிடம்; $\angle CAB = 60°$ $\angle CBA = 45°$ என்றால் ஆற்றின் அகலம் என்ன?

[குறிப்பு: Cயிலிருந்து ABக்கு CX எனும் குத்துக்கோடு வரைக. CX = a என்றால் a இன் மதிப்பைக் கணக்கிடு] (M.U.)

3. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 15 : 14 : 13 என்ற விகிதத்தில் இருந்தால் அதன் கோணங்கள் என்ன? (M. U. 66)

4. ஒரு ஆற்றின் ஒரு கரையில் A, B எனும் இடங்கள் 80 அடி தூரத்தில் உள்ளன. எதிர்க்கரையில் C என்பது ஓரிடம். CAB = 45° CBA = 60° என்றால் ஆற்றின் அகலம் என்ன? (M. U. 66)

IV. இரண்டு பக்கங்களும் ஒரு பக்கத்தின் எதிர்க்கோணமும் தரப்பட்டால், மற்ற உறுப்புக்களைக் கணக்கிடல்.

மாதிரி: $a = 8$, $b = 9$ $A = 50° 20'$ என்றால் மற்ற இரு கோணங்களைக் கணக்கிடுக.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\therefore \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{a \times \sin 50° 20'}{8}$$

$$\therefore \sin B = \frac{9 \times \cdot 7698}{8} = \frac{6 \cdot 9282}{8}$$

$$\therefore \sin B = \cdot 8660$$

$\therefore$ B = 60° அல்லது 120°

ஆனால் A = 50° 20′   50° 20′

C = 69° 41′ அல்லது 9° 40′

இங்கு இரண்டு முக்கோணங்கள் விடையாக வருகிறது.

ஒன்றின் கோணங்கள் $A = 50° 20'$ $B = 60°$ $C = 69° 40'$

மற்றதன் கோணங்கள் $A = 50 \ 20'$ $B = 120°$ $C = 9° 40'$

[குறிப்பு : $A = 50°$ என வரைந்து பார்க்கவும்].

குறிப்பு : இங்கு $a > b \sin A$ ஆனால்
$a < b$ என்பது கவனிக்கத் தக்கது.]

மாதிரி : $a = 10$, $b = 9$ $A = 50° 20'$ என்றால் மற்ற இரு கோணங்களைக் கணக்கிடுக :

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

$$= \frac{9 \times \sin 50° 20'}{10}$$

$$= \frac{9 \times \cdot 7698}{10}$$

$$\sin B = \cdot 69282$$

∴ $B = 43° 51'$ அல்லது $136° 9'$ என்று இரு மதிப்புக்கள் வருகின்றன.

ஆனால் $a > b$ என்பதால் $A > B$ என்று இருக்க வேண்டும். ஆகவே $34° 51'$ என்ற மதிப்புமட்டுமே எடுபடும். மற்ற மதிப்பு $136° 9'$ எடுபடாது. ஆகவே இங்கு ஒரு முக்கோணம்தான் விடையாக வருகிறது.

அதன் கோணங்கள்

$A = 51° 20°$ $B = 43° 51$ $C = 74° 49'$

[குறிப்பு 1 : $A = 51°$ எனக் கொண்டு படம் வரைந்து பார்க்கவும்.]

[குறிப்பு 2 : இங்கு $b \sin A < a$; $b < a$ என்பது கவனிக்கத் தக்கது.]

மாதிரி : $a = 8$ $b = 11$ $A = 50° 20'$ மற்ற கோணங்களைக் கணக்கிடுக.

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{11 \times \cdot 7698}{8}$$

$$\therefore \quad \sin B = \frac{8 \cdot 4678}{8} = 1 \cdot 0585$$

∴ B என்ற கோணம் காணமுடியாது.

குறிப்பு: $b \sin A > a$ என்பதால் $\sin B > 1$ என வருகிறது. ஆகையால் முக்கோணம் வரைய இயலாது.

இங்கு முதல் மாதிரிக் கணக்கு 'ஈரடி வகையின்' பாற்பட்டது.

9·6 **பொது விளக்கம்:** (General Discussion) a, b A தரப்பட்டால் முக்கோணம் வரைய எப்போது இயலும், ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட முக்கோணம் எப்போது இயலும் என்பதைப் பொதுப் படையாக ஆராய்வோம்.

சூத்திரத்தின்படி $\sin B = \dfrac{b \sin A}{a}$

(i) B என்ற கோணம் $b \sin A > a$ என்றால் இயலாது (மாதிரிக் கணக்கு 3ஐப் பார்க்கவும்).

(ii) $b \sin A = a$ என்றால் $\sin B = 1$ ∴ $B = 90°$ ஆகவே முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணமாகிறது.

(iii) $b \sin A < a$ ஆனால் $b > a$ என்றால் $\sin B = \dfrac{b \sin A}{a} < 1$

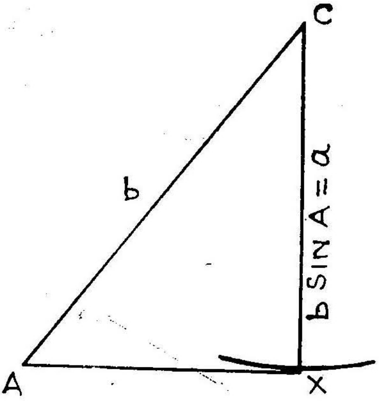
Bக்கு இரண்டு கோணங்கள் காண இயலும். அவை B_1, B_2 ஆகுக. $B_1 + B_2 = 180°$ ஆனதால் அவற்றுள் ஒன்று குறுங்கோணம், மற்றது விரிகோணம். ஆக, இரண்டு முக்கோணங்கள் சாத்தியமாகும்.

(iv) $b \sin A < a$; $b < a$ ($b < a$ என்றாலே $b \sin A < a$ ஆகிவிடும்.) என்றால் Bக்கு இரண்டு மதிப்புக்கள் காண முடியும். அவை B_1, B_2 ஆகுக. $B_1 + B_2 = 180°$ ஆனதால் ஒன்று குறுங்கோணம் மற்றது விரிகோணமாகும். ஆனால் $b < a$ ஆனதால் $B < A$ என வருகிறது. ஆகவே விரிகோண மதிப்பு எடுபடாது. குறுங்கோண மதிப்பு மட்டுமே கொள்ளவேண்டும். அதனால் ஒரு முக்கோணம்தான் இயலும்.

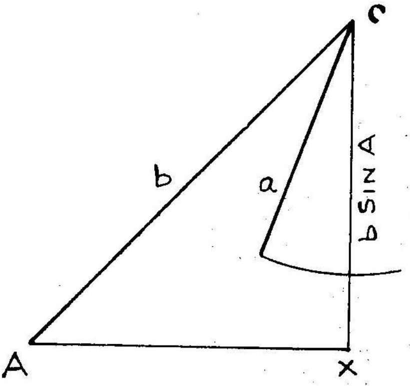
(மாதிரிக் கணக்கு 2ஐக் காண்க).

முடிவாகக் கூறுமிடத்து $a > b \sin A$. ஆனால் $a < b$ என்றால் மட்டுமே ஈரடிவகை முக்கோணம் வருகிறது.

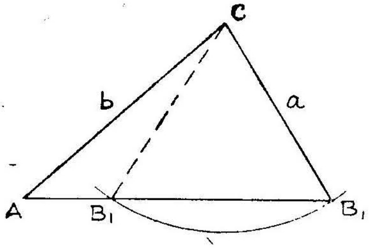
[குறிப்பு: கீழே தரப்படும் நான்கு படங்களிலிருந்து மேற்கூறியவை இன்னும் தெளிவாக விளங்கும்.



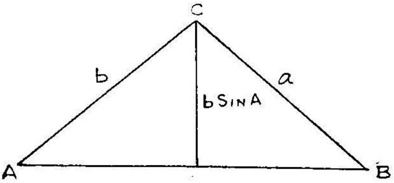
($b \sin A = a$)
(i)



$b \sin A > a$
(ii)



$a < b$; $> b \sin A$
(iii)



$a > b$
(iv)

பயிற்சி 37

முக்கோணங்களின் மற்ற பக்கத்தையும் கோணங்களையும் காண்க.

1.	$a = 11 \cdot 8$	$b = 10 \cdot 2$	$A = 39° 54'$
2.	$a = 37 \cdot 5$	$b = 13 \cdot 5$	$B = 21° \cdot 6'$
3.	$b = 11 \cdot 2$	$c = 16 \cdot 9$	$B = 30° 22'$
4.	$b = 6 \cdot 9$	$c = 10 \cdot 2$	$B = 24° 54'$
5.	$a = 4$,	$b = 5$,	$B = 45°$
6.	$a = 24$	$b = 27$	$\angle A = 40°$
7.	$b = 34 \cdot 56$	$c = 12 \cdot 34$	$C = 46° 57'$
8.	$a = 16$,	$b = 25$	$A = 33° 15'$

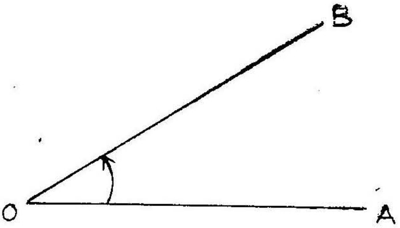
(ii) உயரமும் தூரமும்

கீழ்வகுப்புக்களில், படம் வரைந்து கோபுரங்கள், மரங்கள், குன்றுகள், முதலியவற்றின் உயரங்களைக் காணும் முறையைப் படித்திருப்பீர்கள். இங்குக் கணக்கிட்டுக் காணும் முறையை விளக்குவோம்.

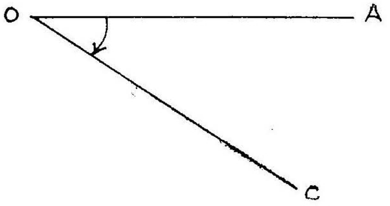
9·7 **சில விளக்கங்கள் : (Some defenitions)**

(i) **ஏற்றக் கோணம் (Angle of elevation) :**

OA என்பது ஒரு கிடைக் கோடு. OB என்பது ஒரு மரத்தின் உச்சியின் திசையைக் குறிக்கிறது என்றால் கோணம் AOB, மர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் எனப்படும்.

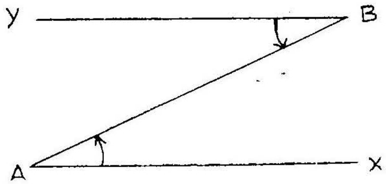


(ii) **இறக்கக் கோணம்** (Angle of depression) :



OA என்பது கிடைக்கோடு C என்பது ஒரு மரத்தின் அடியைக் குறிக்கிறதென் போம். OC அதன் திசையைக் குறிக்கிறது. அப்போது O விலிருந்து பார்த்தால் ∠AOC எனும் கோணம் C யின் இறக்கக் கோணம் எனப்படும்.

குறிப்பு : படத்தில் காண்பது போல் A யிலிருந்து B யின் ஏற்றக் கோணம் ∠XAB ஆகும். B யிலிருந்து A யின் இறக்கக் கோணம் ∠YBA ஆகும். இவை மாற்றுக் கோணங்கள் ஆனதால் இவை சமம்.

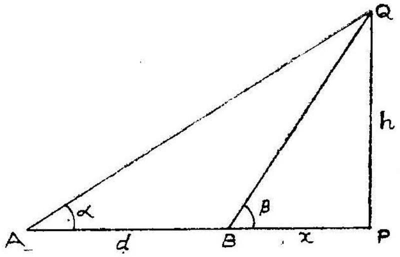


∴ A யிலிருந்து B யின் ஏற்றக் கோணம்.

= B யிலிருந்து A யின் இறக்கக் கோணம்.

மாதிரிக் கணக்குகள்

1. ஓரிடத்திலிருந்து ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 25° 12′ கோபுரத்தை நோக்கி 13 மீட்டர் சமதளத்தில் சென்றால் ஏற்றக் கோணம் 49° 20′ ஆகிறது. கோபுரத்தின் உயரம் என்ன? முதலிடத்திலிருந்து அதன் தூரம் என்ன?



PQ என்பது கோபுரம்; A யிலிருந்து Q வின் ஏற்றக்கோணம் 'α'; B யில்ருந்து β $AB = d$ ஆகுக; $PQ = h$ $BP = x$ ஆகுக. ABQ என்ற முக்கோணத்தில் $\angle AQB = \angle PBQ - \angle PAQ = (\beta - \alpha)$

முக்கோணத்தின் சைன் விதிப்படி:

$$\frac{AB}{\sin AQB} = \frac{BQ}{\sin BAQ} \therefore \frac{d}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{BQ}{\sin\alpha}$$

$$\therefore BQ = \frac{d\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

ஆனால் $h = BQ\sin\beta$ $\qquad x = BQ\cos\beta$

$$\therefore h = \frac{d\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} \qquad x = \frac{d\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

இங்கு $d = 13,\ \beta = 48°\ 20' \quad \alpha = 25°\ 12'$

$\beta - \alpha = 24°\ 8'$

$$\therefore h = \frac{13\sin 25°\ 12'\sin 49°\ 20'}{\sin 24°\ 8'}$$

$$x = \frac{13\sin 25°\ 12'\cos 49°\ 20'}{\sin 24°\ 8'}$$

$$\log 13 = 1 \cdot 1139$$
$$\log \sin 25^\circ 12' = \bar{1} \cdot 6292$$
$$0 \cdot 7431$$
$$(-) \log \sin 24^\circ 8' = \bar{1} \cdot 6116$$
$$1 \cdot 1315 \qquad\qquad 1 \cdot 1315$$
$$+ \log \sin 49^\circ 20' = \bar{1} \cdot 8799 \qquad \log \cos 49^\circ 20' = \bar{1} \cdot 8140$$
$$\log h = 1 \cdot 0114 \qquad \log x = 0 \cdot 9455$$
$$\therefore h = 10 \cdot 27 \qquad \therefore x = 8 \cdot 820$$

$\therefore$ கோபுரத்தின் உயரம் $= 10 \cdot 27$ மீட்டர்

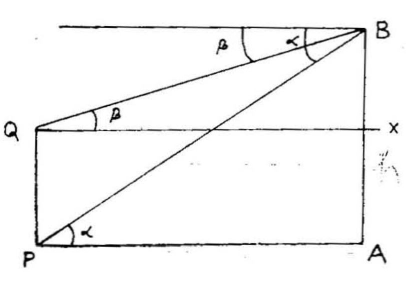
A யிலிருந்து அதன் தூரம் $= x + 13$

$= 21 \cdot 820$ மீ.

[குறிப்பு 1 : இம்மாதிரிக் கணக்குகளில் பொது விதியை முதலில் கண்டு பிறகு பிரதியிட்டு விடை காணவும்]

[குறிப்பு 2 : இத்தகைய 'உயரமும் தூரமும்' கணக்குகளில் ஒரு பொது முக்கோணமும் ஒரு செங்கோண முக்கோணமும் படத்தில் காணலாம். அவைகளின் உதவிகொண்டு விடை காண வேண்டும்.]

மாதிரி: ஒரு குன்றின் உச்சியிலிருந்து ஒரு கோபுரத்தின் அடி, உச்சி இவற்றின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 60°, 45° ஆகும். குன்றின் உயரம் 100 மீட்டர் என்றால் கோபுரத்தின் உயரம் என்ன ?



AB என்பது குன்று; PQ என்பது கோபுரம். $\angle APB$ = B யின் ஏற்றக் கோணம் = B யிலிருந்து P யின் இறக்கக் கோணம் $= \alpha\ (= 60^\circ)$ இதேபோல, $\angle BQX = \beta$ = Q யின் இறக்கக் கோணம்

$\therefore$ $\triangle PQB$ யில் $\angle QPB = \alpha - \beta$

$PQB = 90 + \beta$

$PQ = x$ ஆகுக

$$\therefore \frac{PB}{\sin \angle PQB} = \frac{PQ}{\sin PBQ}$$

$$\therefore \frac{PB}{\sin 90 + \beta} = \frac{x}{\sin (\alpha - \beta)}$$

$$\therefore PB = \frac{x \sin (90 + \beta)}{\sin (\alpha - \beta)}$$

$$= \frac{x \cos \beta}{\sin (\alpha - \beta)}$$

ஆனால் $AB = h = PB \sin \alpha$

$$\therefore h = \frac{x \cos \beta \sin \alpha}{\sin (\alpha - \beta)}$$

[இவ்வாறு பொது விதி வருகிறது.]

$$\therefore x = \frac{h \sin (\alpha - \beta)}{\cos \beta \sin \alpha}$$

இக்கணக்கில் $h = 100$; $\alpha = 60^\circ$ $\beta = 45^\circ$

$$\therefore x = \frac{100 \sin (60 - 45^\circ)}{\cos 45 \sin 60^\circ}$$

$$= \frac{100 \sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{3}} (\sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ)$$

$$= \frac{200 \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{200 \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \frac{(\sqrt{3} - 1)}{2 \sqrt{2}}$$

$$= \frac{100 (\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3}} \text{ மீட்டர்}$$

$$\text{உயரம்} = \frac{100\sqrt{3}\,(\sqrt{3}-1)}{3}$$

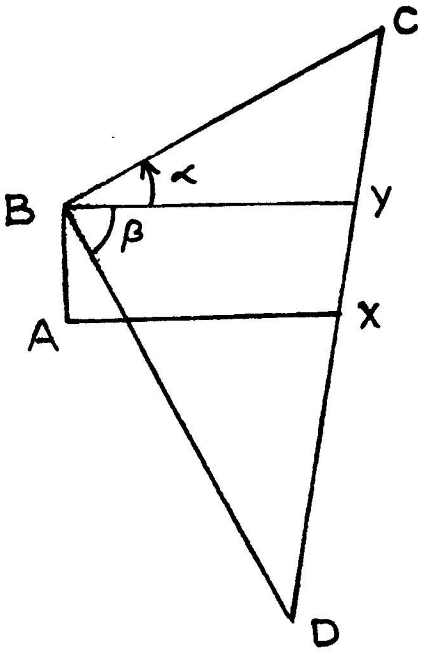
$$= \frac{100\,(3-\sqrt{3})}{3}$$

$$= \frac{(100\,(3-1\cdot 732)}{3}$$

$$\simeq \frac{100 \times 1\cdot 268}{3}$$

$$\simeq 42\cdot 26 \text{ மீட்டர்.}$$

மாதிரி: ஒரு ஏரிக் கரையில் 'h' மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு மேட்டிலிருந்து ஒரு முகில்திரளின் ஏற்றக் கோணம் $\alpha°$. நீரில் அதன் நிழலுருவத்தின் இறக்கக் கோணம் $\beta°$ என்றால் நீர்மட்டத்திற்கு மேலே எத்தனை மீட்டர் உயரத்தில் முகில்திரள் உள்ளது? $\alpha = 45°$ $\beta = 60°$ $h = 100$ மீட்டர் என்றால் உயரம் என்ன?



AX ஏரியின் நீர்மட்டம்.

AB, என்பது மேடு $AB = h$

C முகில்திரள் D அதன் நிழலுருவம்.

$\therefore$ (1) $CD \perp AX$; $CX = XD = x$;
$BY = y$ ஆகுக.

$$\therefore \quad XY = AB = h$$

$$\therefore \quad YC = x - h; \quad YD = x + h$$

$$\frac{YC}{YB} = \tan \alpha \qquad \therefore \quad \frac{x-h}{y} = \tan \alpha$$

$$\frac{YD}{YB} = \tan \beta \qquad \frac{x+h}{y} = \tan \beta$$

$$\therefore \quad \frac{x-h}{x+h} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}.$$

$$\therefore \quad \frac{x}{h} = \frac{\tan \beta + \tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha} \qquad (1)$$

$$= \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}$$

$$\therefore \quad x = \frac{h \sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)} \qquad (2)$$

$h = 100$; $\beta = 60°$ $\alpha = 45°$ என்றால்

$$x = 100 \left[\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}\right] \qquad [(1)\text{ல் பிரதியிட}]$$

$$= \frac{100\ (\sqrt{3} + 1)^2}{(3 - 1)}$$

$$= \frac{100}{2}\left[4 + 2\sqrt{3}\right]$$

$$= 100\left[2 + \sqrt{3}\right] = 100 \times 3 \cdot 732$$

உயரம் $= 373 \cdot 2$ மீட்டர்.

பயிற்சி 38

1. ஒரு சாலையில் நேராக ஒரு குன்றை நோக்கிச் செல்லும் ஒருவன், அடுத்தடுத்த மைல் கற்களில் குன்றின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 30°, 75° எனக் காண்கிறான் என்றால் குன்றின் உயரம் என்ன?

2. ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து நேராகக் கீழே பார்க்கும்போது இரண்டு வீடுகளின் அடித்தளங்களின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 62° 18′, 34° 36′ எனக் காணப்படுகிறது வீடுகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் 100 அடி என்றால் கோபுரத்தின் உயரம் என்ன?

3. 20 மீட்டர் உயரத்தில் உள்ள ஒரு வீட்டின் மாடியிலிருந்து இரண்டு வண்டிகளின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 57°, 48; 48° 18′ என்றால் அவைகளிடையே உள்ள தூரமென்ன?

4. கடல் மட்டத்திற்கு 180 அடி உயரமுள்ள ஒரு மாடியிலிருந்து நேராகக் கடலைப் பார்த்ததில் இரண்டு கப்பல்களின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 42° 16′ என்றால் கப்பல்களிடையேயுள்ள தூரம் என்ன?

5. ஒரு ஆற்றின் கரையிலிருந்து நேர்எதிர்க் கரையிலுள்ள ஒரு உச்சிக் கோணம் 36° 18′ எனத் தெரிகிறது. 150 அடி பின்னாகச் சென்றால் ஏற்றக்கோணம் 17° 30′ ஆகிறது. மரத்தின் உயரம் என்ன? ஆற்றின் அகலமென்ன?

6. ஒரு குன்றின் உச்சியிலிருந்து கீழே நேராகச் செல்லும் பாதையில் இரண்டு அடுத்தடுத்த மைல்களைப் பார்த்ததில் அவற்றின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 5°, 15° ஆகின்றன. என்றால் குன்றின் தூரம் என்ன?

7. AB என்ற இரண்டு இடங்களுக்கு நடுவே மேலே ஒரு பலூன் தென்படுகிறது. அதன் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 58° 45′, 47° 36′. AB யின் தூரம் 100 மீட்டர் என்றால், பலூன் எத்தனை மீட்டர் உயரத்தில் மேலே பறக்கிறது.

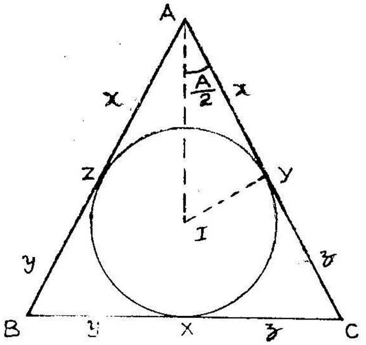
8. ஒரு வீட்டின் மாடியிலிருந்து ஒரு மரத்தின் உச்சியையும் அடியையும் பார்த்ததில் ஏற்ற இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 62° 18′, 44° 15′ ஆகும். வீட்டின் உயரம் 28 அடி என்றால் மரத்தின் உயரம் என்ன? வீட்டிலிருந்து அதன் தூரம் என்ன?

9. ஒரு வீட்டின் கீழே இருந்து கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 72° 48′. வீட்டின் உயரம் 20 மீட்டர் என்றால் கோபுரத்தின் உயரம் என்ன?

10. பிற்சேர்ப்பு (Appendix)

I. முக்கோணங்கள்.

10·1 A, B, C என்ற முக்கோணத்தில் A, B, C என்ற முனைகளிலிருந்து உள் வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் முறையே $(s-a)$, $(s-b)$ $(s-c)$ ஆகும்.



உள்வட்டம் BC, CA, AB என்ற பக்கங்களை x, y, z என்ற புள்ளிகளில் தொடுகின்றன. A, B, C என்ற முனைகளிலிருந்து வரையப்படும் தொடு கோடுகளின் நீளங்கள் முறையே, x, y, z ஆகுக.

சுற்றளவு $= 2s =$

$$\begin{aligned} & BX + XC &= y + z \\ + & CY + YA & + z + x \\ + & AZ + ZB & + x + y \end{aligned}$$

$$\therefore \quad 2s = 2x + 2y + 2z.$$

$$\therefore \quad s = x + y + z$$

ஆனால் $a = y + z$

$$\therefore \quad (s-a) = x$$

$\therefore$ Aயிலிருந்து உள் வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் $(s-a)$ ஆகும். இவ்வாறே B Cயிலிருந்து வரை

யப்படும் தொடு கோடுகளின் நீளங்கள் முறையே $(s-b)$, $(s-c)$ ஆகும்.

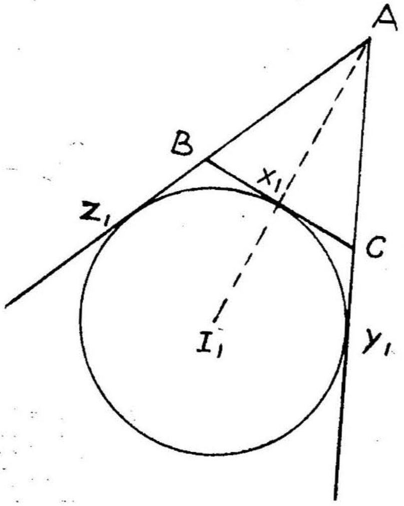
குறிப்பு 1. இவைகளைச் சூத்திரம்போல எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

குறிப்பு 2. I என்பது உள்வட்டமையம $\therefore \angle IAY = \frac{A}{2}$

$$\therefore \tan\frac{A}{2} = \frac{IY}{AY} = \frac{r}{(s-a)}$$

$$\therefore \tan\frac{A}{2} = \frac{r}{(s-a)}; \quad \tan\frac{B}{2} = \frac{r}{(s-b)}; \quad \tan\frac{C}{2} = \frac{r}{(s-c)}$$

10·2 **வெளித் தொடுகோட்டு வட்டங்களுக்கு முனைகளிலிருந்து வரையப்படும் தொடு கோடுகளின் நீளங்கள்.**



$$AZ_1 = AY_1 = x$$
$$BZ_1 = BX_1 = y$$
$CX_1 = CY_1 = z$ என்றால்
$$a+b+c = (y+z) + (x-z) + (x-y)$$
$$\therefore \quad 2s = 2x \qquad \therefore \quad x = s$$
$$y = BZ_1 = AZ_1 - AB = s - c$$
$$z = CY_1 = AY_1 - AC = s - b$$

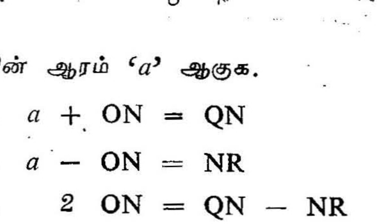
ஆகவே மூன்று வெளித் தொடு வட்டங்களுக்கும் உள் தொடு வட்டத்திற்கும் முனைகளிலிருந்து வரையப்படும் தொடு கோடுகளின் நீளங்களைக் கீழ்வருமாறு பட்டியலில் காட்டலாம்.

வட்டம் / முனை	I_1	I_2	I_3	I
A	s	$(s-c)$	$(s-b)$	$(s-a)$
B	$(s-c)$	s	$(s-a)$	$(s-b)$
C	$(s-b)$	$(s-a)$	s	$(s-c)$

10·3 2A என்ற கோணத்தின் கோண விகிதங்கள் (படம் வரைந்து நிறுவகை.)

OR என்ற விட்டத்தில் அரை வட்டம் வரைக $\angle RQP = A$ எனும்படி Pஐ வட்டத்தில் குறிக்கவும். மையம் O என்றால் OPஐச் சேர்க்கவும்.

$\therefore \angle ROP = 2A$ QRக்கு PN குத்தாக வரையவும்.



$\therefore \angle NPR = A$ வட்டத்தின் ஆரம் 'a' ஆகுக.

$$QO + ON = QN \qquad \therefore a + ON = QN$$

$$OR - ON = NR \qquad \therefore a - ON = NR$$

$$\therefore 2\,ON = QN - NR$$

(*i*) $OP \sin 2A = PN = QP \sin A = QR \cos A \sin A$

$$\therefore a \sin 2A = 2a \sin A \cos A \left[\begin{array}{c} OP = a \\ QR = 2a \end{array}\right]$$

$$\therefore \sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

(ii) $OP \cos 2A = ON$

$\therefore \quad 2\, OP \cos 2A = 2\, ON$

$= QN - NR$

$= PQ \cos A - PR \sin A$

$= QR \cos A \cos A - QR \sin A \sin A$

$\therefore \quad 2a \cos 2A = 2a \cos^2 A - 2a \sin^2 A$

$\therefore \quad \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$OP \cos 2A = ON = QN - QO = QP \cos A - a$

$\therefore \quad a \cos 2A = QR \cos A \cdot \cos A - a$

$= 2a \cos^2 A - a$

$\therefore \quad \cos 2A = 2 \cos^2 A - 1$

$OP \cos 2A = ON = OR - NR = a - PR \sin A$

ஆனல் $PR = QR \sin A = 2a \sin A$

$\therefore \quad a \cos 2A = a - 2a \sin^2 A$

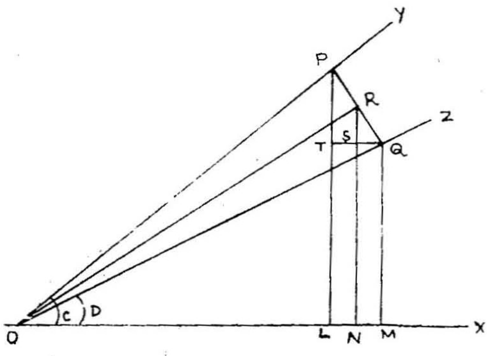
$\therefore \quad \cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A$

$$\tan 2A = \frac{NP}{ON} = \frac{2\,NP}{2\,ON} = \frac{2\,NP}{ON - NR}$$

$$\therefore \quad \tan 2A = \frac{\dfrac{2\,NP}{QN}}{1 - \dfrac{NR}{QN}} = \frac{2 \tan A}{1 - \dfrac{NR}{NP} \cdot \dfrac{NP}{QN}} = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\therefore \quad \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

10·4 உருவமாற்ற சூத்திரங்களின் படம் வழி நிறுவுகை. (Geometrical Proofs of Product Formulas.)



XOY என்ற கோணம் C ஆகுக.

XOZ என்ற கோணம் D ஆகுக.

ZOY என்ற கோணத்தின் சமவெட்டி OR ஆகுக.

ORக்கு Rல் குத்தாக PQ என்ற கோடு வரைக. இது OYஐ Pயிலும் OZஐ Qவிலும் வெட்டட்டும். OXக்கு PL, QM, RN எனும் குத்துக் கோடுகள் வரைக; PLக்கு QT எனும் குத்துக் கோடு வரைக. இது RNஐ Sல் வெட்டட்டும்.

இப்போது: $\angle QOP = C - D$

$$\therefore \quad \angle QOR = \frac{C-D}{2}; \ \angle NOR = D + \left(\frac{C-D}{2}\right) - \frac{C+D}{2}$$

$$\angle NRQ = \angle SRQ = 90^\circ - SRO = \angle NOR = \frac{C+D}{2}$$

$$OQ = OP$$

$$\because \quad SR \parallel PT; \ PR = RQ \quad \therefore \quad 2\,SR = PT; \ LN = NM$$

$$2ON = OL + LM \quad LP + MQ = 2\,NR$$

$$OP \sin C + OQ \sin D = LP + MQ$$

$$= 2\,NR$$

$$\therefore \quad OQ \sin C + OQ \sin D = 2\,OR \sin \frac{C+D}{2}$$

$$= 2\,OQ \cos \frac{C-D}{2} \sin \frac{C+D}{2}$$

$$(1) \quad \therefore \quad \sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$OP \sin C - OQ \sin D = LP - MQ = LP - LT = PT$$

$$\because \quad (OP = OQ) \quad \therefore \quad OQ \sin C - OQ \sin D = 2\,SR$$

$$= 2\,RQ \cos SRQ$$

$$= 2\,OR \sin QOR \cdot \cos SRQ$$

$$= 2\,OQ \sin \frac{C-D}{2} \cos \frac{C+D}{2}$$

$$\therefore \quad \sin C - \sin D = 2 \cdot \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

$$\begin{aligned} OQ \cos D + OP \cos C &= OM + OL \\ &= 2\,ON \\ &= 2\,OR \cos \frac{C+D}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad OQ \cos D + OQ \cos C = 2\,OQ \cos \frac{C-D}{2} \cos \frac{C+D}{2}$$

$$\therefore \quad \cos D + \cos C = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$\begin{aligned} OQ \cos - OP \cos C &= OM - OL \\ &= LM \\ &= TQ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad OQ \cos D - OQ \cos C &= 2\,SQ \\ &= 2\,RQ \sin SRQ \\ &= 2\,OQ \sin \angle QOR \sin SRQ \\ &= 2\,OQ \sin \frac{C-D}{2} \sin \frac{C+D}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \cos D - \cos C = 2 \sin \frac{C-D}{2} \sin \frac{C+D}{2}$$

10.5 மூன்று பக்கங்கள் தரப்பட்டால், மூன்று கோணங்களைக் கணக்கிடல் :

இதற்குக் கீழ் வரும் சூத்திரங்கள் தேவை.

$$(i) \quad \tan \frac{A}{2} = \frac{r}{(s-a)}; \quad \tan \frac{B}{2} = \frac{r}{(s-b)};$$

$$\tan \frac{C}{2} = \frac{r}{(s-c)}$$

(இவைகளின் நிரூபணம் பிற்கோப்பில் காண்க.

$$(ii) \quad r = \frac{\triangle}{s} \qquad (ii) \quad \triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(இவைகளை ஏற்கனவே நிறுவியுள்ளோம்.)

கணகிடும் முறை : முக்கோணம் ABC யில்

(i) a, b, c தரப்பட்டால் $s, (s-a), (s-b), (s-c)$ காணலாம்.

(ii) இவற்றின் இலாகரிதங்களை எழுதலாம்.

(iii) $\log \triangle = \frac{1}{2}[\log s + \log(s-a) + \log(s-b) + \log(s-c)]$

$$\log r = \log \triangle - \log s \qquad \left[\because \triangle = \frac{r}{s}\right]$$

$$\log \tan \frac{A}{2} = \log r - \log(s-a) \left[\therefore \tan \frac{A}{2} = \frac{r}{s-a}\right]$$

$$\log \tan \frac{B}{2} = \log r - \log(s-b)$$

$$\log \tan \frac{C}{2} = \log r - \log(s-c)$$

ஆகவே $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ என்ற கோணங்களைப் பட்டியலி லிருந்து எழுதலாம்.

A, B, C என்ற கோணங்களின் அளவு இவ்வாறு காணப் படுகின்றன.

மாதிரி: ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 130, 123, 77 என்றால், அதன் கோணங்களைக் கணக்கிடுக :

		log
	$s = 165$	2·2175
$a = 130$	$(s-a) = 35$	1·5441
$b = 123$	$(s-b) = 42$	1·6232
$c = 77$	$(s-c) = 88$	1·9445
$2s = 330$	330	2 | 7·3293
		$\log \triangle = 3·66465$
		$\log s = 2·2175$
		$\log r = 1·44715$

$\log r = 1{\cdot}44715$	$\log r = 1{\cdot}44715$	$\log r = 1{\cdot}44715$
$\log (s-a) = 1{\cdot}5441$	$\log (s-b) = 1{\cdot}6282$	$\log (s-c) = 1{\cdot}9445$
$\log \tan \frac{A}{2} = \bar{1}{\cdot}90305$	$\log \tan \frac{B}{2} = \bar{1}{\cdot}82395$	$\log \tan \frac{C}{2} = \bar{1}{\cdot}50265$
$\therefore \frac{A}{2} = 38^\circ 39'$	$\frac{B}{2} = 33^\circ 42'$	$\frac{C}{2} = 17^\circ 39'$
$\therefore A = 77^\circ 18'$	$B = 67^\circ 24'$	$C = 35^\circ 18'$

[குறிப்பு: இந்த முறையில், A, B, C தனித்தனியாகக் காணப்படுவதால் அவற்றின் கூடுதல் 180° வருகிறதா எனச் சரி பார்க்க முடிகிறது.]

10.6 மாற்று நிறுவகை: (i) $\triangle = \sqrt{s=(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\text{(ii)}\ \tan \frac{A}{2} \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-b)}}$$

(படம் 10.2ஐப் பார்க்கவும்)

$$\tan \frac{B}{2} = \frac{r}{(s-b)} \qquad (1)$$

$$\tan \frac{B}{2} = \frac{B X_1}{r_1} = \frac{(s-c)}{r_1} \qquad (2)$$

$$\therefore \frac{r}{(s-b)} = \frac{(s-c)}{r_1}$$

$$r r_1 = (s-b)(s-c)$$

$$\therefore \frac{\triangle^2}{s(s-a)} = (s-b)(s-c)$$

$$\therefore \triangle^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$\therefore \triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$(ii)\quad (1) \times (2)\quad \tan^2 \frac{B}{2} = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{(s-c)}{(s-b)}$$

$$= \frac{(s-a)(s-c)}{s\ (s-b)}$$

[Foot Note: This method is suggested in Elementary Trigonometry by I. Todhunter F.R.S. and in the Report of Teaching of Trigonometry. G. Bell & Sons.]

$$\therefore \tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s\ (s-b)}}$$

இதேபோல $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s\ (s-a)}}$

$$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-a)}{s\ (s-c)}}$$

வரைப் படம்

10·7 **y = sin x° இன் வரைப்படம்** வரைய கோணம் $0°$ விருந்து $360°$ வரை மாறும்போது அதன் சைன் விகிதம் எவ்வாறு மாறுகிறது என்பதை விளக்கக் கீழ் வருமாறு வரைப் படம் வரையலாம்.

(i) 2 அங்குல ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக.

(ii) O′ CO அதன் விட்டம் ஆகுக.

(iii) CO உடன் $30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180'......360°$ வரைகோணம் ஏற்படும்படி ஆரங்கள் வரைக.

(iv) ஆரத்தின் முனைகளின் உயரங்கள், கோணங்களின் சைன் விகிதங்களுடன் நேர்விகிதப் பொருத்தத்தில் இருக்கும்.

(v) ஆகவே O ஐ மூலப் புள்ளிகளாகவும் CO ஐ நீட்ட வரும் கோட்டை x அச்சாகவும் கொண்டு, தக்க அளவுத் திட்டத்திற்குப் படத்தில் காண்பது போல வரைப்படம் வரைக. [சைன் $30°$ ஐக் குறிக்க $30°$ க்கு மேல், அந்தக் கோணம் தரும் ஆரமுனை எந்த உயரத்தி லிருக்கிறதோ அந்த உயரத்தில் புள்ளியைக் குறிக்கவும். இவ்வாறே மற்றக் கோணங்களுக்கும்.
சைன் வரைப்படம் 'அலை'போல் இருப்பதைக் கவனிக் கவும்.]

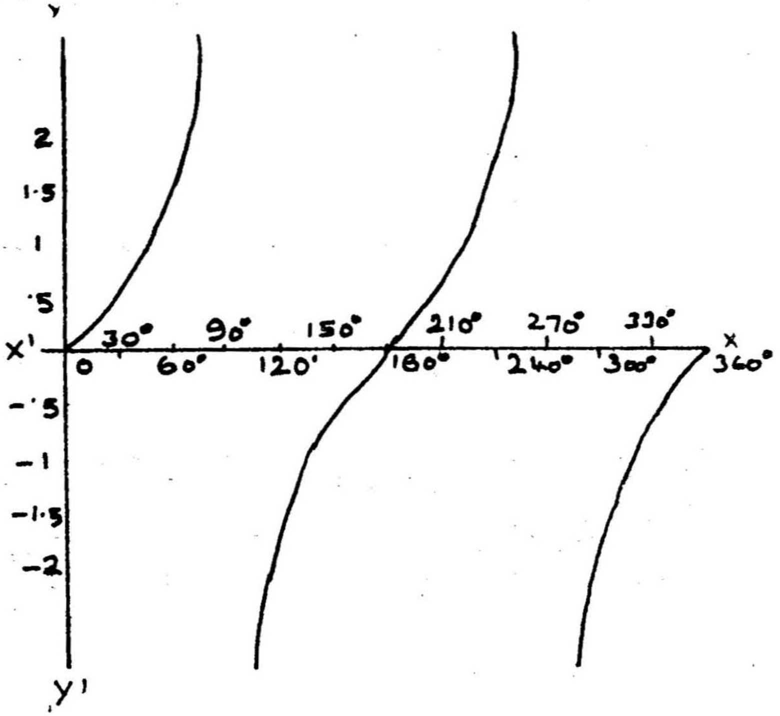
10·8 **y = cos x இன் வரைப்படம்:** $\sin(90° - x) = \cos x$ ஆனதால் மேற்கூறிய வரைப்படத்தில் மூலப் புள்ளியை $90°$ வலப்பக்கம் தள்ளி, கோணம் ஒவ்வொன்றையும் $90°$ குறைக்க, கோசைன் வரைப் படம் வரும்.

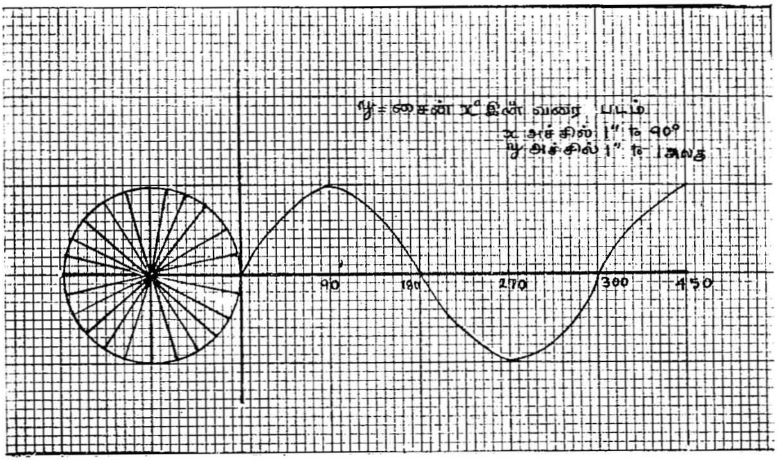
y = tan x வரைப்படம் :

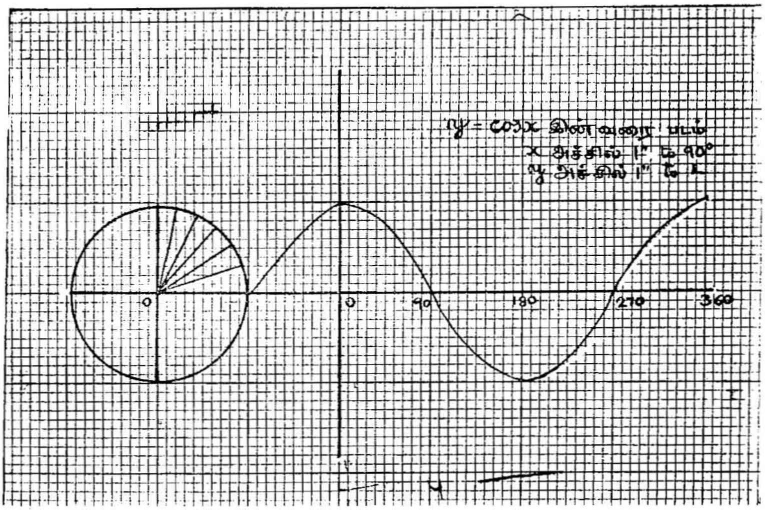
x	0	30	45	60	90°	120°	135	50	180
$y = \tan x$	0	·6	1	1·7	$\to +\infty$ $-\infty \to$	−1·7	−1	−·6	0

x	210	225	240	270	300	315	330	360°
$\tan x$	·6	1	1·7	$\to \infty$ $-\infty \to$	1·7	−1	−·6	0

இந்தப் புள்ளிகளைக் குறிக்க $y = \tan x$ வரைபடம் வருகிறது.




y = சைன் x° இன் வரை படம்
x அச்சில் 1" டு 90°
y அச்சில் 1" டு 1 அலகு
90
180
270
360
450


y = cos x இன் வரை படம்
x அச்சில் 1" டு 90°
y அச்சில் 1" டு 1
0
0
90
180
270
360

இயல்முறை வரை கணிதம்

1. முன்னுரை - புள்ளி

1·1 **முன்னுரை:** புள்ளி, நேர்வரை, நேர்கோட்டு உருவங்கள், வட்டம் முதலியவற்றைப் பற்றிக் கூறுவது வரை கணிதம் (Geometry) ஆகும். ஒரு சில எடுகோள்களிலிருந்தும், இன்னும் சில அடிப்படை விதிகளிலிருந்தும் கோவையாகப் பல்வேறு வரைகணித உண்மைகளை யூக்ளித முறை வரைகணிதம் வரவழைக்கிறது. பதினேழாம் நூற்றாண்டுவரை இம்முறையில் மட்டுமே வரைகணிதம் பயிலப்பட்டு வந்தது.

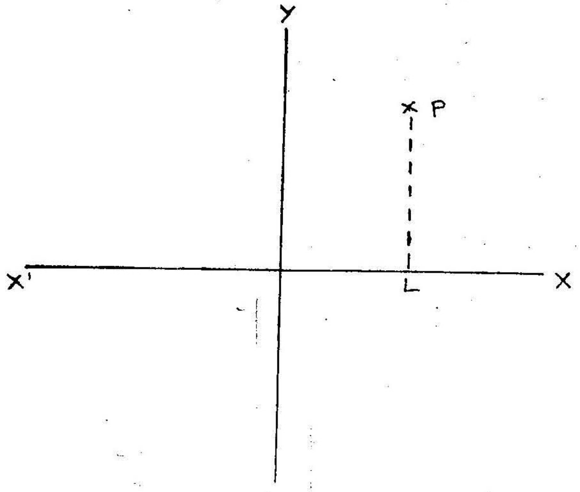
பதினேழாம் நூற்றாண்டுத் துவக்கத்தில் ரெனி டெகார்ட் (Rene Decartes, 1596 - 1650) என்ற பிரெஞ்சுப் பேரறிஞர் இயற் கணிதத்தின் (Algebra) உதவியால் வரைகணித உண்மைகளைக் காணும் முறையை வகுத்தார். பின்னர் அறிவியல் நூல் வளர்ச் சிக்கே இம்முறை காரணமாயிற்று.

இம் முறையின் அடிப்படைக் கொள்கைகளையும், அவை களின் உதவியால் நேர்கோடு, வட்டம் இவைகளின் தன்மை களையும் அறியும் வகையை இச்சிறு நூலில் விவரிப்போம்.

1·2 **புள்ளி:** புள்ளி எனப்படுவது இரு கோடுகள் வெட்டு மிடம் என வரைகணிதத்தில் சொல்லப்படுகிறது. இப்புது முறையில் இரு எண்களின் உதவியால் புள்ளி நிச்சயிக்கப்படு கிறது. இந்த எண்கள் புள்ளியின் உறுப்புக்கள் (Co-ordinates) எனப்படும். இவைகளைப் பலமுறைகளில் காணலாம். அவை களில் ஒரு முறையை மட்டும் ஈண்டு கூறுவோம்.

1·3 **புள்ளியின் குத்துறுப்புக்கள் (Rectangular Co-ordinates of a Point):** படத்தில் X'OX, Y'OY என்பன ஒன்றுக்கொன்று

குத்தாக உள்ள இரு நேர்கோடுகளாகும். P என்பது ஒரு புள்ளி. Pயிலிருந்து X'OXக்கு PL என்ற குத்துக்கோடு வரை.



இப்போது P என்னும் புள்ளியை O விலிருந்து அடைய OX என்ற திசையில் OL தூரம் சென்று, பிறகு OY என்ற திசையில் LP தூரம் செல்ல வேண்டும்.

X'OX என்ற கோடு X அச்சு எனப்படும்.

Y'OY என்ற கோடு Y அச்சு எனப்படும்.

O என்ற புள்ளி மூலப்புள்ளி (Origin) எனப்படும்.

OL என்ற தூரம் Pயின் x உறுப்பு எனப்படும்.

LP என்ற தூரம் Pயின் y உறுப்பு எனப்படும்.

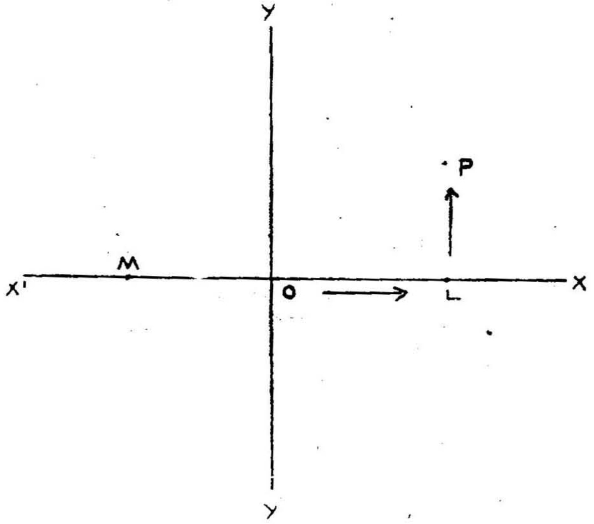
$OL=a$; $LP=b$ எனில் P என்ற புள்ளி P (a, b) என்று குறிக்கப்படும்.

1·4 **தளத்தின் நான்கு பிரிவுகள்** (The Four Quadrants) : XOY என்ற பாகம் முதற் பிரிவு (First Quadrant) எனவும், இவ்வாறே YOY', X'OY', Y'OX என்பவை இரண்டாவது, மூன்றுவது, நான்காவது பிரிவுகள் எனப்படும்.

OX என்ற திசையில் தூரங்கள் நேரெண்களாலும் அதாவது தன எண்ணாலும் (Positive number), OX' என்ற எதிர்திசையில் அளக்கப்படும் தூரங்கள் எதிரெண்ணாலும் அதாவது ரிண எண்ணாலும் (Negative Number) குறிக்கப்படும்.

இவ்வாறே OY என்ற திசையில் அளக்கப்படும் தூரம் நேரெண்ணாலும், OY' என்ற திசையில் அளக்கப்படும் தூரம் எதிரெண்ணாலும் குறிக்கப்படும்.

1·5 **புள்ளியைக் குறித்தல்** (Plotting the Points) : i. P(2, 3) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க முதல் X'OX, YOY' என்ற குத்துக் கோடுகளான அச்சுக்களை வரை.



OX என்ற திசையில் OL என்ற 2 அலகு தூரம் செல்லவும். அங்கிருந்து OY என்ற திசையில் LP என்ற 3 அலகு தூரம் செல்லவும். P என்பது (2, 3) என்ற புள்ளியாகும். இது முதல் பிரிவில் அமைகிறது.

ii. Q (−1, −2) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க, −1 என்பது x உறுப்பு எதிரெண். ஆகவே OX' என்ற திசையில் OM என்ற 1 அலகு தூரம் செல்லவும். Y உறுப்பு −2 ஆனதால் M லிருந்து OY' என்ற திசையில் MQ என்ற 2 அலகு தூரம் செல்லவும். இப்போது Q என்பது (−1, −2) என்ற புள்ளியாகும்.

குறிப்பு : 1. இயல்முறை வரை கணிதத்தில் இரண்டு அச்சுக்களிலும் அளக்கப்படும் தூரங்களை ஒரே அளவுத் திட்டத்திற்குக் (Same Scale) கொள்ள வேண்டும். வரைபடம் வரைவதில் சில சமயங்களில் வேறு வேறு அளவுத் திட்டங்களை எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

2. இயல்முறை வரைகணிதத்தில் புள்ளிகளின் தூரங்களைச் சுமாராகக் குறிப்பிட்டால் (Rough way) போதும். அவ்வாறு குறிக்கப்படும் படம் துணைப்படம் (Rough Figure) எனப்படும்.

பயிற்சி 1

A

வாய்மொழி

1. கீழ்வரும் புள்ளிகள் எந்தப் பிரிவில் அமைகின்றன என்று கூறவும்.

$(3, 8)$; $(-2, 3)$; $(4, -5)$; $(-5, -7)$; $(1\cdot 3, -7)$; $\left(-\frac{3}{8}, \frac{1}{6}\right)$; $(5, 0)$; $(0, 2\cdot 8)$; (a^2, b^2); $(-a^2, -b^2)$; $(p^2, -q^2)$; $(0, 0)$.

B

துணைப்படம் வரைந்து விடை காணவும்

2. $P(3, 4)$; $Q(3, -4)$ என்ற புள்ளிகளிடையே உள்ள தூரம் என்ன? PQ வின் நடுப்புள்ளியின் உறுப்புக்கள் என்ன? X அச்சுக்கும், PQ வுக்கும் இடையே உள்ள கோணம் எவ்வளவு? OQ வின் நீளத்தைக் கணக்கிடு.

3. $(3, 4)$; $(-12_8\ 5)$; $(-8, -15)$ என்ற புள்ளிகள் மூலப்புள்ளியிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் அமைகின்றன?

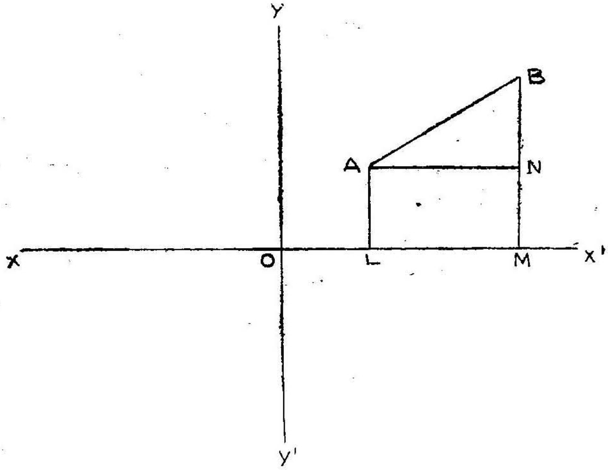
4. மூலப்புள்ளி, $(6, 0)$; $(0, 8)$ என்ற புள்ளிகள் வழியே ஒரு வட்டம் செல்லுகிறது. வட்ட மையத்தின் உறுப்புக்களைக் கண்டுபிடி. ஆரத்தின் நீளத்தைக் காண்.

5. மூலப்புள்ளியையும், $(6, 8)$ என்ற புள்ளியையும் சேர்க்கும் கோட்டின் நடுப்புள்ளியின் உறுப்புக்கள் யாவை?

6. ABCD என்ற சதுரத்தில் A ஆனது (2, 3) ஆகவும், B என்பது (—3, 3) ஆகவும் இருந்தால் C, D என்பவைகளின் உறுப்புக்களை எழுது.

1·6 **புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம்:** புள்ளியை எண் இணைகளால் (Pair of numbers—ஜதை எண்களால்) குறிக்கும் வகையைக் கூறினோம். அதாவது வரைகணித மொழியில் புள்ளி எனப்படுவது, இப்புது முறையில் 'எண் இணை' என ஆயிற்று. இரண்டு புள்ளிகள் என்றால் இரண்டு ஜோடி எண்களாகும். இவ்வாறு அமையும் போது அப்புள்ளிகளுக் கிடையே உள்ள தூரத்தை அந்த இணை எண்களால் எவ்வாறு கூறுவது என்பதைப் பார்ப்போம்.

இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம்.



A (x_1, y_1) ; B (x_2, y_2) என்பன இரு புள்ளிகள்.
ABயைக் கணக்கிட

X அச்சுக்குக் குத்தாக AL, BM என்ற கோடுகள் வரை. BMக்குக் குத்தாக AN வரை.

$$\angle ANB = 90^\circ \quad \therefore \quad AB^2 = AN^2 + NB^2$$

ஆனால் $AN = LM = OM - OL = x_2 - x_1$.

$$BN = MB - MN = MB - LA = y_2 - y_1$$

$$\therefore \quad AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \text{ அல்லது } (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

குறிப்பு : $i \quad OA^2 = x_1^2 + y_1^2$

$ii \quad AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$iii \quad OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

புள்ளிகளை $(x_1\ y_1)$; $(x_2\ y_2)$; $(x_3\ y_3)$ ....($x_A\ y_A$), ($x_B\ y_B$), ($x_C\ y_C$) .... எனவும் குறிப்பது உண்டு.

புள்ளிகள் எந்தப் பிரிவில் இருப்பினும் இந்த சூத்திரம் பொருந்தும்.

மாதிரி : (2, + 4) ; (− 3, − 7) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் என்ன?

A (2, 4) ; B (−3, − 7)

$AB^2 = 5^2 + 11^2$

$= 25 + 121 = 146$

$\therefore \quad AB = \sqrt{146}.$

[குறிப்பு : (i) கழித்தலை மனத்தில் செய்யவும். (ii) கழித்தல் விதியான, குறியை மாற்றிக் கூட்டும் முறையைப் பயன் படுத்தவும்.]

மாதிரி : (2, 4) ; (−6, − 7) ; (3, −2) என்ற புள்ளிகளை முனைகளாக உடைய முக்கோணம் எவ்வகை முக்கோணம்? அதன் சுற்றளவைக் கணக்கிடு.

A (2, 4) $\quad AB^2 = 8^2 + 11^2 = 185$

B (−6,−7)

C (3,−2) $\quad BC^2 = (-9)^2 + (-5)^2 = 106$

A (2, 4) $\quad CA^2 = 1^2 + (-6)^2 = 37$

மிகப் பெரிய பக்கம் AB.

$AB^2 > BC^2 + CA^2 \quad \therefore \quad \angle C$ விரிகோணம்

∴ இது அசமபக்க விரிகோண முக்கோணம்.

சுற்றளவு $= AB + BC + CA$

$= \sqrt{185} + \sqrt{106} + \sqrt{37}$

குறிப்பு : முக்கோணத்தின் மிகப் பெரிய பக்கத்தின் வர்க்கம் மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களில் கூடுதலுக்கு,

அதிகமானல் ... ... விரிகோண △
சமமானல் ... ... செங்கோண △
குறைந்தால் ... ... குறுங்கோண △

பயிற்சி 2

(1) மூலப்புள்ளியிலிருந்து கீழே தரப்படும் புள்ளிகளின் தூரங்களைக் கணக்கிடு.

(i) $(3, 4)$; (ii) $(-12, 5)$ (iii) $(-8, -6)$
(iv) $(-5, 3)$ (v) $(at^2, 2at)$ (vi) $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$

(2) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரத்தைக் கணக்கிடு.

(i) $(5, 2)$, $(9, 5)$ (ii) $(-4, 3)$; $(-8, 6)$
(iii) $(-6, 4)$, $(-3, 2)$ (iv) $(4, 3)$; $(-11, -2)$
(v) $(-a, -b)$ $(a, -b)$ (vi) $(2+\sqrt{3}, 5)$; $(2, 6)$

(3) பின்வரும் முக்கோணங்கள் எவ்வகையானவை?

(i) $(0, 0)$, $(2, 3)$, $(0, -1)$
(ii) $(6, 1)$, $(2, -5)$, $(8, -1)$
(iii) $(3, 7)$, $(-3, 2)$, $(4, -5)$

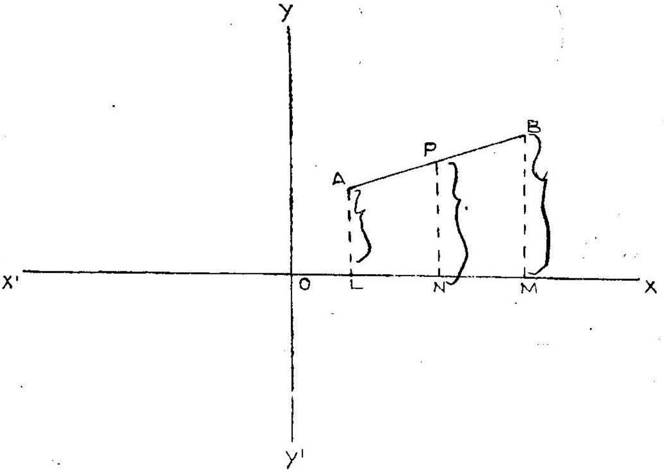
(4) பின்வரும் முக்கோணங்கள் இரு சமபக்க முக்கோணங்கள் என நிறுவு,

(i) $(4, 0)$, $(1, 4)$, $(5, 1)$
(ii) $(-5, 7)$ $(1, 4)$, $(-2, 1)$
(iii) $(-3, -7)$ $(-6, -3)$ $(-2, -6)$
(iv) $(-4, 6)$, $(2, 3)$, $(-1, 0)$

(5) பின்வருபவை இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணங்கள் என்று காட்டு.

(i) $(9, 5)$, $(-7, 1)$, $(3, -5)$
(ii) $(11, 7)$, $(-5, 3)$; $(5, -3)$
(iii) $(3, -1)$, $(-13, -5)$; $(-3, -11)$

1·7 இரண்டு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டுத்துண்டை குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி.



A $(x_1\ y_1)$; B $(x_2\ y_2)$ என்பன இரு புள்ளிகள் P என்ன புள்ளி ABயை $m : n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. P என்ற புள்ளியின் உறுப்புக்களைக் காண.

P ($x_P\ y_P$) என்க.

AL, BM, PN—இவைகளை X அச்சுக்குக் குத்தாக வரை.

$$\therefore \quad \frac{LN}{NM} = \frac{AP}{PB}$$

$$\therefore \quad \frac{x_P - x_1}{x_2 - x_P} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore \quad mx_2 - mx_P = nx_P - nx_1$$

$$\therefore \quad x_P\ (m+n) = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore \quad x_P = \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}\right)$$

இதேபோல் $y_P = \left(\frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$

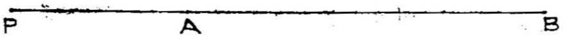
∴ A $(x_1\, y_1)$; B $(x_2\, y_3)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டுத்துண்டை $m : n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியான Pயின் உறுப்புக்கள்

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}\right), \quad \left(\frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right) \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்பு : (1) ABக்கு வெளியே P என்ற புள்ளி அமைந்தால் AP, PB என்ற கோட்டுத் துண்டங்கள் எதிரெதிர்த் திசைகளில் அமையும்.

∴ $\frac{AP}{PB}$ என்ற விகிதம் எதிரெண் ஆகும். அப்போது

விகிதத்தை $\frac{-m}{n}$ அல்லது $\frac{m}{-n}$ என்று குறிப்பிடலாம். மேற்கூறிய சூத்திரம் இதற்கும் பொருந்தும் (மாதிரிக் கணக்கைக் காண்க).



(2) ABயின் நடுப்புள்ளியாக P அமைந்தால் விகிதம் 1 : 1 ஆகும். அதாவது AP : PB = 1 : 1. ஆகவே, நடுப்புள்ளி $\frac{x_1 + x_2}{2}$, $\frac{y_1 + y_2}{2}$ ஆகிறது.

(3) சில கணக்குகளில் A, B, P என்ற புள்ளிகள் தரப்பட்டு $\frac{AP}{PB}$ என்ற விகிதம் கேட்கப்படும். அப்போது $\frac{AP}{PB} = \frac{k}{1}$ என்று கொள்வது நலம். அவ்வாறு கொண்டால் $x_P = \frac{kx_2 + x_1}{k+1}$; $y_P = \frac{ky_2 + y_1}{k+1}$ ஆகும். இதில் k என்பது முழு எண், பின்னம், நேரெண், எதிரெண் – முதலியவைகளில் ஏதேனுமாகலாம்.

மாதிரி: A (− 4, 2); B (5, − 3) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டுத்துண்டை 2 : 5 என்ற விகிதத்தில் உள்ளேயும், வெளியேயும் பிரிக்கும் புள்ளிகளைக் காண்க.

AB யை P என்ற புள்ளி உள்ளே 2 : 5 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது என்க.

(i) AP : PB = 2 : 5

A(−4, 2)
B (5, −3) விகிதம் 2 : 5

$$\therefore x_P = \frac{(2\times 5)+(5\times -4)}{2+5} = \frac{-10}{7}$$

$$y_P = \frac{(2\times -3)+(5\times 2)}{2+5} = \frac{4}{7}$$

$$\therefore \; P\left(\frac{-10}{7}, \frac{4}{7}\right)$$ ஆகும்.

(ii) AB ஐ 2 : 5 என்ற விகிதத்தில் வெளியே பிரித்தால்

$$\frac{AQ}{QB} = \frac{-2}{5}$$

A (−4, 2)
B (5, −3) விகிதம் −2 : 5

$$\therefore x_Q = \frac{-10-20}{-2+5} = \frac{-30}{3} = -10$$

$$y_Q = \frac{6+10}{-2+5} = \frac{16}{3}$$

$$\therefore \; Q\left(-10, \frac{16}{3}\right)$$ ஆகும்.

பயிற்சி 3

(1) பின் வரும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளியைக் கண்டுபிடி.

(i) (4, 5), (2, 3) *(ii)* (−5, 3), (−3, −7)

(iii) (8, −3), (3, 5) *(iv)* (−7, −4), (−4, 7)

(v) (−11, 5), (11, 7) *(vi)* $(a, -b), (-a, b)$.

(2) *(i)* AB யின் நடுப்புள்ளி P (−3, 1). A (3, −2) என்றால் Bன் உறுப்புக்களைக் கண்டுபிடி.

(ii) (4, −7) என்பது AB யின் நடுப்புள்ளி. B (−7, 8) எனில் A யின் உறுப்புக்கள் என்ன?

(iii) BC யின் நடுப்புள்ளி $(-1, -3)$. $C(1, 1)$ எனில் Bயைக் கண்டுபிடி.

(3) *(i)* PQ என்பது ஒரு வட்டத்தின் விட்டம். வட்ட மையம் $(1, -5)$. $P(7, -5)$ எனில் Q வைக் கண்டுபிடி.

(ii) $(-7, -11)$ ஐ மையமாக உடைய வட்டத்தில் $(-5, 0)$ என்புது ஒரு புள்ளி. அதன் வழியே செல்லும் விட்டத்தின் மற்ற முனையின் உறுப்புக்களைக் கணக்கிடு.

(iii) XY என்பது ஒரு வட்டத்தின் விட்டம். அதன் மையம் மூலப்புள்ளி. $X(3, -5)$ எனில் Y யைக் கண்டுபிடி.

(4) பின்வரும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடுகளைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விகிதங்களில் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் உறுப்புக்களைக் காணவும்.

	A	B	விகிதம்	
(i)	$(3, 2)$	$(1, 1)$	$3 : 2$	(உள்ளே)
(ii)	$(5, 2)$	$(3, 7)$	$4 : 5$	(,,)
(iii)	$(-5, 2)$	$(3, -4)$	$1 : 4$	(,,)
(iv)	$(8, 7)$	$(1, 2 \cdot 5)$	$2 : 3$	(,,)
(v)	$(0, -4)$	$(-4, 0)$	$2 : 7$	(,,)
(vi)	$(-5, 8)$	$(2, -4)$	$7 : 4$	(வெளியே)
(vii)	$(-3, -9)$	$(1, -1)$	$2 : 5$	(,,)
(viii)	$(2 \cdot 5, -3)$	$(-3, 2)$	$3 : 4$	(,,)
(ix)	$(-5, -2)$	$(0, 0)$	$1 : 2$	(,,)

(5) $P(3, 4)$ என்ற புள்ளி AB யை $3 : 4$ என்ற விகிதத்தில் உள்ளே பிரிக்கிறது. $A(5, 2)$ எனில் B யைக் காண்க.

(6) ABயை X அச்சு $2 : 3$ என்ற விகிதத்திலும் (உள்ளே); Y அச்சு அதே விகிதத்தில் வெளியேயும் பிரிக்கிறது. $A(3, -6)$ எனில் B யைக் கண்டுபிடி.

(7) $(-2, 5)$, $(8, -10)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டுத் துண்டை *(i)* X அச்சு *(ii)* Y அச்சு எந்த விகிதங்களில் பிரிக்கும்?

(8) $(-1,\ 6)$, $(-16,\ 6)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை $(-10,\ 12)$ என்ற புள்ளி என்ன விகிதத்தில் பிரிக்கிறது?

(9) $(1,\ 4)$, $(9,-2)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டுத் துண்டை $(5,\ 1)$ என்ற புள்ளி என்ன விகிதத்தில் பிரிக்கிறது?

(10) $(1,\ -1)$, $(7,\ -4)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை $(-5,\ y_1)$ என்ன விகிதத்தில் பிரிக்கிறது? y_1 இன் மதிப்பு என்ன?

மாதிரி: ஒரு நாற்கரத்தின் முனைகள் முறையே $(4,\ -1)$, $(1,\ -2)$, $(-2,\ 1)$; $(1,\ 2)$ என்றால் அது ஒரு இணைகரம் என்று காட்டு.

புள்ளிகள் முறையே $A(4,\ -1)$; $B(1,\ -2)$; $C(-2,\ 1)$, $D(1,\ 2)$ என்க.

$$\text{AC யின் நடுப்புள்ளி} = \left(\frac{4-2}{2},\ \frac{-1+1}{2}\right) = (1,\ 0)$$

$$\text{BD யின் நடுப்புள்ளி} = \left(\frac{1+1}{2},\ \frac{-2,+2}{2}\right) = (1,\ 0)$$

AC, BD யின் நடுப்புள்ளி $(1,\ 0)$. அதாவது AC, BD என்ற மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமபாகங்களாக வெட்டிக் கொள்கின்றன. $\therefore$ ABCD இணைகரம்.

மாதிரி: (x_A, y_A), (x_B, y_B); (x_C, y_C); (x_D, y_D) ABCD என்ற இணைகரத்தின் முனைகளானால் $x_A + x_C = x_B + x_D$ ஆகும்; $y_A + y_C = y_B + y_D$ ஆகும் என்று காட்டு.

ABCD என்பது ஒரு இணைகரம்.

$\therefore$ AC யின் நடுப்புள்ளியும், BD யின் நடுப்புள்ளியும் ஒன்றே.

$$\text{AC யின் நடுப்புள்ளி} = \left(\frac{x_A + x_C}{2},\ \frac{y_A + y_C}{2}\right)$$

$$\text{BD யின் நடுப்புள்ளி} = \left(\frac{x_B + x_D}{2},\ \frac{y_B + y_D}{2}\right)$$

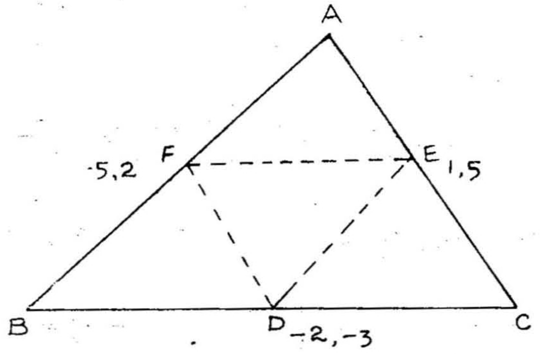
இரண்டும் ஒரே புள்ளியாகையால்

$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

$$x_A + y_C = y_B + y_D$$

மறுதலை: ABCD என்ற நாற்கரத்தில் எதிர்முனைகளின் x உறுப்புக்களின் கூடுதல்களும், y உறுப்புக்களின் கூடுதல்களும் சமமானால் ABCD இணைகரம் ஆகும்.

மாதிரி: ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே $(-2, -3)$, $(1, 5)$, $(-5, 2)$ எனில் முக்கோணத்தின் முனைகளைக் கண்டுபிடி.



$\triangle$ன் முனைகள்

$A(x_A\ y_A)$; $B(x_B\ y_B)$ $C(x_C\ y_C)$ ஆகுக.

BCயின் நடுப்புள்ளி $D(-2-3)$

CAயின் நடுப்புள்ளி $E(1, 5)$

ABயின் நடுப்புள்ளி $F(-5, 2)$

AFDE ஒரு இணைகரம்

$\therefore\ x_A - 2 = -5 + 1 \quad \therefore\ x_A = -2$

$y_A - 3 = 2 + 5 \quad \therefore\ y_A = 10.$

$\therefore\ A(-2, 10)$ ஆகும்.

இதேபோல் BDEF இணைகரம்

$\therefore\ x_B + 1 = -5 - 2 \quad \therefore\ x_B = -8$

$y_B + 5 = 2, -3 \quad \therefore\ y_B = -6$

$\therefore\ B(-8, -6)$

CEFD இணைகரம்

$\therefore\ x_C - 5 = -2 + 2 \quad \therefore\ x_C = 4$

$y_C + 2 = -3 + 5 \quad \therefore\ y_C = 0$

$\therefore\ C = (4, 0)$

$\therefore\ \triangle$ன் முனைகள் $(-2, 10)$; $(-8, -6)$; $(4, 0)$ ஆகும்.

பயிற்சி 4

(1) நாற்கரத்தின் முனைகள் வரிசையாகத் தரப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு நாற்கரமும் இணைகரம் என்று காட்டு.

(i) $(-3, 2)$, $(5, -4)$, $(-7, -8)$, $(-15, -2)$

(ii) $(1, 5)$, $(-2, -6)$, $(-5, 11)$, $(-2, 22)$

(iii) $(-10, 9)$, $(5, 6)$, $(12, -5)$, $(-3, -2)$

(iv) $(2, 2)$, $(5, 5)$, $(2, 4)$, $(-1, 1)$.

(2) ஒரு இணைகரத்தின் மூன்று முனைகள் வரிசையாகத் தரப்பட்டுள்ளன. நான்காவது முனையைக் கண்டுபிடி.

(i) $(5, 3)$, $(7, 2)$, $(-3, -2)$

(ii) $(3, -7)$, $(-2, -7)$, $(3, -8)$

(iii) $(-1, -2)$, $(2, -3)$, $(-2, 4)$

(iv) $(3, 4)$, $(7, 8)$, $(-5, 2)$

(3) ஒரு இணைகரத்தின் மூன்று முனைகள் $(6, 5)$, $(-2, -3)$, $(-10, 9)$ எனில் $(6, 5)$க்கு எதிராக உள்ள நான்காவது முனையைக் கண்டுபிடி.

(4) $(-2, -1)$, $(0, 0)$, $(5, 7)$ என்பன ஒரு இணைகரத்தின் மூன்று முனைகள். $(5, 7)$க்கு எதிராக உள்ள நான்காவது முனையைக் கண்டுபிடி.

(5) A, B, C முறையே $(5, -1)$, $(-2, -1)$, $(-5, -8)$ ஆகும். ABCX என்ற இணைகரத்தின் ஒரு மூலைவிட்டம் AC எனில் Xஐக் கண்டுபிடி. ACBY என்ற இணைகரத்தின் ஒரு மூலைவிட்டம் AB எனில் Yயைக் கண்டுபிடி.

6. $(2, 1)$, $(5, 4)$, $(1, 4)$ என்பவை ஒரு இணைகரத்தின் மூன்று முனைகள் $(2, 1)$ என்ற முனைக்கு எதிராகவுள்ள நான்காவது முனையைக் கண்டுபிடி. (M.U.)

1·8 ஒரு முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தி

(Centroid of a triangle) ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு முனையை அதன் எதிர்ப்பக்கத்தின் நடுப்புள்ளியுடன் சேர்க்கும் நேர்கோடு, மையக்கோடு அல்லது நடுக்கோடு எனப்படும். ஒரு முக்கோணத்திற்கு மூன்று நடுக்கோடுகள் உண்டு. இம்மூன்று கோடுகளும்

ஒரு புள்ளி வழியே செல்பவையாகும். அந்தப் புள்ளிக்கு மையக் கோட்டுச் சந்தி என்று பெயர்.

ABC என்ற முக்கோணத்தில் D என்பது BC யின் நடுப்புள்ளி யானல் G என்ற மையக் கோட்டுச் சந்தி AD யை 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும். அதாவது AG : GD = 2 : 1 ஆகும்.

A $(x_1\ y_1)$, B $(x_2\ y_2)$, C $(x_3\ y_3)$ என்ற முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தியைக் கண்டுபிடி :

BC யின் நடுப்புள்ளி D $(x_D\ y_D)$ ஆகுக.

$$\therefore \quad 2x_D = x_2 + x_3$$

மையக் கோட்டுச் சந்தி G $(x_g\ y_g)$ ஆனது A $(x_1\ y_1)$ D $(x_D\ y_D)$ யை 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் உள்ளே பிரிக்கிறது.

$$\therefore \quad x_g = \frac{2x_D + x_1}{2+1} = \frac{x_2 + x_3 + x_1}{3}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

இதேபோல

$$y_g = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

$\therefore$ $\triangle$ A$(x_1\ y_1)$ B$(x_2\ y_2)$ C$(x_3\ y_3)$ ன் மையக் கோட்டுச் சந்தி $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ ஆகும்.

பயிற்சி 6

(1) பின்வரும் முனைகளையுடைய முக்கோணங்களின் மையக் கோட்டுச் சந்திகளைக் காணவும்.

(i) (−3, −2), (8, −5), (7, −3)

(ii) (−5, 4), (−3, −7), (3, −8)

(iii) (−1, 3), (6, 2), (4, −8)

(2) (3, −8), (−5, 2) என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் இருமுனைகளாகும். அதன் மையக் கோட்டுச் சந்தி மூலப் புள்ளி யானல் மூன்றாவது முனையைக் கண்டுபிடி.

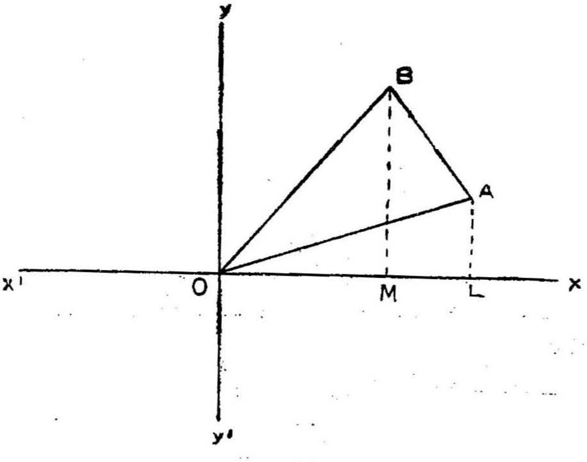
(3) ஒரு முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தி (−1, 2) அதன் இரண்டு முனைகள் (3, −11), (−13, −5) எனில் மூன்றுவது முனை என்ன ?

4. ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகள் (3, −4), (−12, 5), (9, −1) முனைகளிலிருந்து மையக் கோட்டுச் சந்தியின் தூரங்களைக் கணக்கிடு.

(5) ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் (−3, 1), (5, −4). முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தி மூலப்புள்ளியானுல் முக்கோணத்தின் முனைகளைச் கண்டுபிடி.

1·9 முக்கோணத்தின் பரப்பு :

A $(x_1\ y_1)$, B $(x_2\ y_2)$ என்றுல் △ OAB யின் பரப்பு X அச்சுக்கு AL, BM என்ற குத்துக்கோடுகள் வரை.



$$OM = x_2 ; \quad OL = x_1$$

$$\therefore \quad ML = (x_1 - x_2)$$

$$MB = y_2 ; \quad LA = y_1$$

$\triangle$ AOB யின் பரப்பு $= \triangle OMB + MBAL - \triangle OLA$

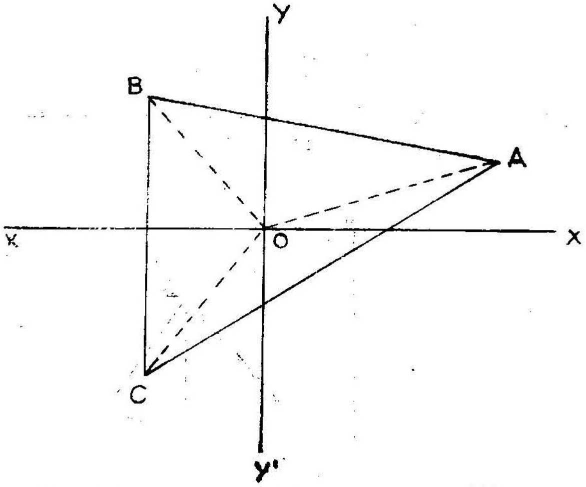
$$= \tfrac{1}{2} OM \cdot MB + \tfrac{1}{2} ML(MB+LA) - \tfrac{1}{2} OL \cdot LA$$

$$= \tfrac{1}{2}\{x_2 y_2 + (x_1 - x_2)(y_2 + y_1) - x_1 y_1\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\{x_1 y_2 - x_2 y_1\}$$

குறிப்பு : $x_1 y_2 - x_2 y_1$ என்பதை $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ என்றும் குறிக்கலாம்.

A $(x_1\ y_1)$ B $(x_2\ y_2)$ C $(x_3\ y_3)$ எனில் $\triangle$ ABC யின் பரப்பு.

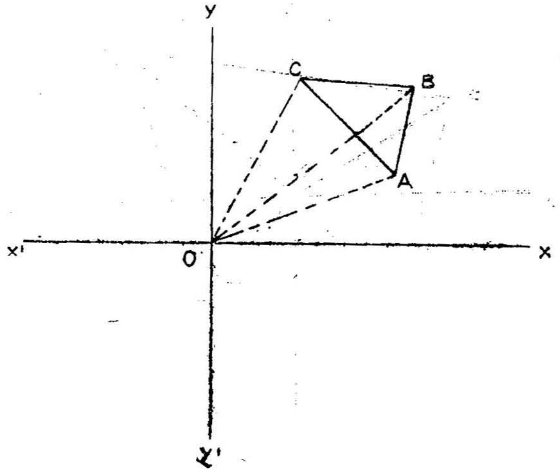


$$\triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$$

மேலே உள்ள சூத்திரத்தின்படி.

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) + \tfrac{1}{2}(x_2 y_3 - x_3 y_1) + \tfrac{1}{2}(x_3 y_1 - x_1 y_3)$$

$$= \tfrac{1}{2}[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_1) + (x_3 y_1 - x_1 y_3)]$$



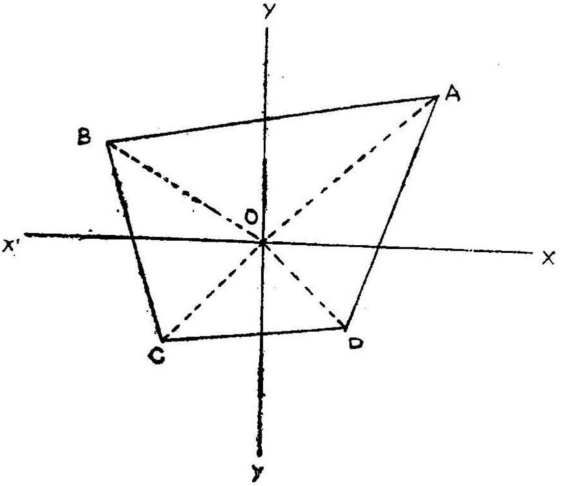
குறிப்பு : $\triangle$ ABC = $\triangle$ OAB + $\triangle$ OBC + $\triangle$ OCA என்பது எல்லாப் படங்களுக்கும் பொருந்தும். ஆனால், பரப்பும் நேரெண்ணாகவும், எதிரெண்ணாகவும் இருக்க முடியும் என்பது அறியத் தக்கது. இடமாகச் சுற்றி (Anticlock wise) வரும்போது ஏற்படும் பரப்பு நேரெண்ணாகவும், வலமாகச் சுற்றி (clock wise) வரும் போது ஏற்படும் பரப்பு எதிரெண்ணாகவும் இருக்கும். படம் (ii)ல் OAB, OBC என்பவை நேரெண்ணாகும், $\triangle$ OCA எனும் பரப்பு வலமாகச் சுற்ற வருவதால் எதிரெண்ணாகும்.

$\therefore$ OAB + OBC + OCA = $\triangle$ ABC ஆகிறது.

குறிப்பு 2 : ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு O என வந்தால் மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும் என்பதை உணர்க.

குறிப்பு 3 : நாற்கரம் ABCD யின் பரப்பை மேற்கூறியவாறே காணலாம்.

நாற்கரம் ABCD = $\triangle$ OAB + $\triangle$ OBC + $\triangle$ OCD + $\triangle$ ODA. ஆனால் AB, BC, CD, DA என்ற பக்கங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டாமலும், சாதாரணமான குவிநாற்கரமாகவும் அமைய வேண்டும்.



நாற்கரத்தின் நான்கு முனைகள் தரப்பட்டால், அவைகளைத் துணைப் படத்தில் குறித்துப் பிறகு குவிநாற்கரமாக இருக்குமாறு முனைகளை வரிசையாக அமைக்க வேண்டும். (மாதிரியைக் காண்க).

குறிப்பு 4: முக்கோணத்தின் முனைகள் சாதாரண எண்களால் தரப்பட்டால் கீழே விவரிக்கப்படும் முறையைக் கையாளலாம்.

(i) புள்ளிகளின் பெயர்களையும், அவற்றின் உறுப்புக்களையும் கீழ்க்கண்டவாறு எழுது.

A	$(x_1 \quad y_1)$	
B $x_2\, y_1$	$(x_2 \quad y_2)$	$x_1\, y_2$
C $x_3\, y_1$	$(x_3 \quad y_3)$	$x_2\, y_3$
A $x_1\, y_3$	$(x_1 \quad y_1)$	$x_3\, y_1$
(II)		(I)

(ii) அம்புக் குறிகள் இணைக்கும் எண்களின் பெருக்கற் பலனைக் குறித்தபடி இரண்டு கலங்களில் எழுதவும்.

(iii) △ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}$ [முதற் கலத்தின் கூடுதல் — இரண்டாவது கலத்தின் கூடுதல்]

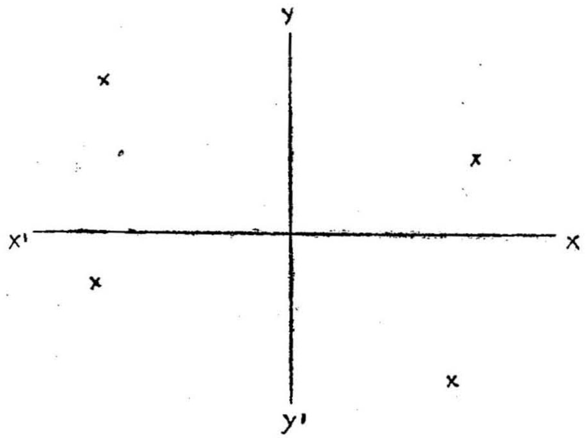
குறிப்பு 5: மேற்கூறிய முறையை நாற்கரத்திற்கோ அல்லது வேறு மற்ற குவிப்பலகோணத்திற்கோ – பரப்பைக் கண்டு பிடிக்கக் கையாளலாம்.

மாதிரி: ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகள் $(-5, 7), (2, -8), (3, 1)$ எனில் அதன் பரப்பைக் கண்டுபிடி.

A		$(-5,\ 7)$	
B	14	$(2,\ -8)$	40
C	-24	$(3,\ 1)$	2
A	-5	$(-5,\ 7)$	21
(II)	-15		63 (I)

$\therefore$ △ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}(63 + 15) = 39$ ச. அலகுகள்.

மாதிரி: ஒரு நாற்கரத்தின் முனைகள் $(-3, -1), (3, 1), -4, 6), (4, -6)$ எனில் அதன் பரப்பைக் கண்டுபிடி.



∴ துணைப்படத்தில் புள்ளிகளைக் குறித்தால் $(-3, -1)$, $(4, -6)$, $(3, 1)$, $(-4, 6)$ என்ற வரிசையில் புள்ளிகளைச் சேர்க்கப் பரப்பு கிடைக்கும்.

A		$(-3, -1)$	
B	-4	$(4, -6)$	18
C	-18	$(3, 1)$	4
D	-4	$(-4, 6)$	18
A	-18	$(-3, -1)$	4
	-44		44

∴ பரப்பு $= \frac{1}{2}(44 + 44) = 44$ ச. அலகுகள்.

பயிற்சி 7

(1) கீழ்க்கண்ட முக்கோணங்களின் பரப்பைக் கண்டுபிடி.

(i) $(3, -5)$, $(5, 8)$, $(-2, 3)$

(ii) $(8, -5)$, $(-6, -3)$, $(-2, 4)$

(iii) $(-5, 3)$, $(-5, -7)$, $(7, -4)$

(iv) $(8, -2)$, $(-3, 5)$, $(3, 5)$.

(2) கீழே தரப்பட்டுள்ள மூன்று புள்ளிகளாலான முக்கோணங்களின் பரப்பைக் கண்டுபிடி. அப்புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும் என்று காட்டு.

(i) $(3, 7)$, $(7, -5)$, $(10, -14)$

(ii) $(-5, 12)$, $(7, -8)$, $(4, -3)$

(iii) $(a + b, c)$; $(c + a, b)$; $(b + c, a)$

(3) A $(3, 5)$ B $(-3, -3)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டிலிருந்து மூலப்புள்ளியின் தூரத்தைக் கணக்கிடு. [AB யின் தூரத்தையும், △ OAB யின் பரப்பையும் கண்டு விடையைக் காணவும்].

(4) $(-3, 2)$, $(1, 5)$, $(6, -7)$ என்ற முனைகளையுடைய முக்கோணத்தின் குத்துயரங்களைக் கணக்கிடு.

(5) ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு 64 ச. அலகுகள். $(12, 8)$, $(4, -8)$ என்பவை முக்கோணத்தின் இருமுனைகள். மூன்றாவது முனை x அச்சில் உள்ளது எனில் அதன் உறுப்புக்கள் என்ன?

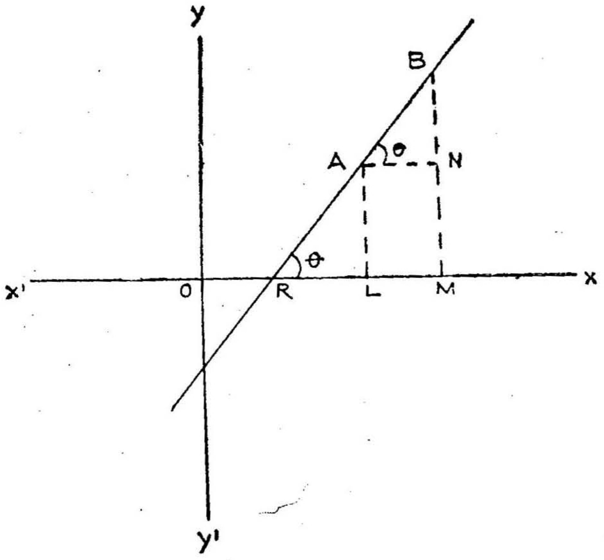
(6) கீழ்க்கண்ட புள்ளிகளை முனைகளாகவுடைய நாற்கரத்தின் பரப்பைக் கணக்கிடு.

(i) $(-4, 3)$, $(-5, -7)$, $(7, -4)$ $(3, 8)$

(ii) $(5, -3)$ $(-7, 8)$ $(-3, -1)$ $(8\ 1)$

1.10 **நேர் கோட்டின் சரிவு** (Gradient of the straight line)

சாய்வும் சரிவும்: AB என்ற நேர்கோடு X'OX என்ற X அச்சுடன் θ ('தீடா' என்று உச்சரிக்கவும்) என்ற கோணத்தை இடமாக உண்டாக்கட்டும்.



θ என்ற கோணம் A B என்ற நேர் கோட்டின் சாய்வு (Inclination) எனப்படும்.

குறிப்பு: X'RB என்ற கோணம் சாய்வு ஆகாது. X'OX என்ற திசையிலிருந்து AB என்ற திசை இடமாகத் திரும்பி வந்தால் சாய்வு நேரெண் ஆகும். வலமாகத் திரும்பினால் சாய்வு எதிரெண்ணாகும்.

சரிவு: சாய்வுக் கோணத்தின் டான் விகிதம் (Tangent) சரிவு (gradient or slope) எனப்படும். இங்கு சரிவு $= \tan \theta$.

குறிப்பு: சாய்வு என்பது கோணமாகும். சரிவு என்பது ஒரு விகிதம். அது வெற்று எண்.

A $(x_1\ y_1)$ B $(x_2\ y_2)$ வழியே செல்லும் நேர் கோட்டின் சரிவு: AL, BM என்ற குத்துக் கோடுகளை X அச்சுக்கு வரை. AN என்பது BM க்குக் குத்துக் கோடு.

$$AN = (x_2 - x_1) \quad ; \quad NB = (y_2 - y_1)$$

$$\angle NAB = \angle MRB = \theta \quad \text{(ஒத்த கோணங்கள்)}$$

$\therefore$ ABயின் சரிவு $= \tan\theta = \tan \angle NAB$

$$= \frac{BN}{AN}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$\therefore$ A $(x_1\ y_1)$, B $(x_2\ y_2)$ வழியே செல்லும் நேர் கோட்டின் சரிவு $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(\text{அல்லது } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)$ ஆகும்.

இரண்டு புள்ளிகள் வழியே செல்லும் நேர்கோட்டின் சரிவு $= \dfrac{y \text{ உறுப்புக்களின் வித்தியாசம்.}}{x \text{ உறுப்புக்களின் வித்தியாசம்.}}$

இங்கு 'சரிவு' என்பது நேர்கோட்டின் திசையைத் தருகிறது. இந்தச் சூத்திரம் Aயிலிருந்து B அமையும் திசையைத் தருகிறது.

பயிற்சி 8

(டான் விகிதப் பட்டியலை வேண்டுமிடத்துப் பயன்படுத்தவும்)

1. நேர் கோடுகளின் சாய்வுகள் தரப்பட்டுள்ளன. அவைகளின் சரிவுகளைக் கண்டுபிடி.

$45°, 60°, 30°, 135°, -45°, -30°, 38°, 65°, 122°\ 142°, 116°, -75°$

2. நேர் கோடுகளின் சரிவுகள் தரப்பட்டுள்ளன. சாய்வுகளைக் கண்டுபிடி.

$\sqrt{3},\ 1,\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -1,\ 1{\cdot}567\ -{\cdot}3678,\ 0$

3. இரண்டு கோடுகளின் சாய்வுகள் தரப்பட்டுள்ளன. துணைப்படம் வரைந்து அவைகளுக்கிடையே உள்ள கோணத்தைக் கண்டுபிடி.

45°, 35° ; 45°, 30° ; 60°, 45° ; 90°, 112° ; 52°, 142 ; 30°, − 28°.

4. கீழ்க்கண்ட பட்டியலைப் பூர்த்திசெய்.

	A	B	ABயின் சரிவு
i.	(3, 5)	(7, 8)	....
ii.	(− 2, − 3)	(− 5, 2)	....
iii.	(3, − 6)	(− 3, 4)	....
iv.	(0, 0)	(− 5, − 5)	....
v.	(− 2, − 3)	(3, − 5)	....
vi.	(0, 0)	$(x_1\ y_1)$	....
vii.	$(-g, -f)$	$(-g^1, -f^1)$	....
viii.	$(at_1^2\ 2at_1)$	$(at_2^2, 2at_2)$	....

1.11 **இணை கோடுகள்:** ABயும் CDயும் இணை கோடுகளானால் அவை X அச்சுடன் சமமான கோணங்களில் சாய்ந்திருக்கும்.

∴ ABயின் சரிவு = CDயின் சரிவு. மறுதலையாக, AB, CD என்ற இரு கோடுகளின் சரிவுகள் சமமானால் அவை ஒன்றுக்கொன்று இணையாக இருக்கும்.

குறிப்பு 1. A, B, C என்பவை ஒரு கோட்டிலமையும் புள்ளிகளானால் AB, BC, CA என்ற கோடுகள் யாவும் ஒன்றே. ஆகையால் அவைகளின் சரிவுகளும் ஒன்றே.

∴ ABயின் சரிவு = BCயின் சரிவு.

குறிப்பு 2. மறுதலையாக ABயின் சரிவும், BCயின் சரிவும் ஒன்றேயானால் A, B, C என்பன ஒரே நேர்கோட்டிலமையும் புள்ளிகளாகும்.

$A(x_1\ y_1)$; $B(x_2\ y_2)$, $C(x_3\ y_3)$ ஆகுக.

$\therefore$ AB யின் சரிவு $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

BC யின் சரிவு $= \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$

1. $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$ எனில் A, B, C ஒரே நேர் கோட்டில் அமையும்.

2. AB : BC $= \dfrac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$ அல்லது $\dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2}$

மாதிரி: A (2, 5) B (4, 6) C (8, 8) என்பவை ஒரே நேர் கோட்டில் அமைபவை என்று காட்டு. அவ்வாறெனில் AB : BC எவ்வளவு?

சரிவு AB $= \dfrac{6-5}{4-2} = \dfrac{1}{2}$

சரிவு BC $= \dfrac{8-6}{8-4} = \dfrac{1}{2}$

சரிவு AB = சரிவு BC. $\therefore$ A, B, C ஒரே நேர் கோட்டில் அமையும்.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{6-5}{8-6} = \frac{1}{2}$$

பயிற்சி 9

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள புள்ளித் தொகுதிகள் ஒரே நேர் கோட்டில் அமையும் என்று காட்டு.

i. (3, 4), (7, 8), (8, 9)

ii. (– 2, – 3), (2, – 11) ; (– 1, – 5)

iii. (– 5, 1), (3, – 3·8), (– 2, – ·8)

iv. $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{11}{7}\right)$; (4, 0) ; $\left(0, \dfrac{12}{7}\right)$

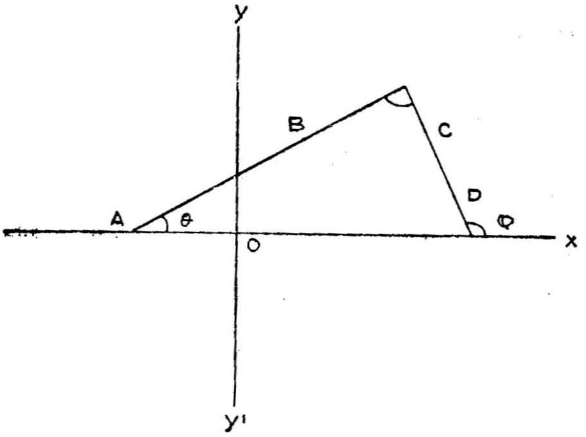
2. நாற்கரங்களின் முனைகள் வரிசையில் தரப்பட்டுள்ளன. இவை டிரெபீஸியங்கள் என்று நிரூபி.

i. $(4, -1)$, $(1, -2)$, $(-2, 1)$; $(-5, 0)$

ii. $(-10, 9)$, $(5, 6)$; $(12, -5)$; $(-3, -2)$

iii. $(2, 2)$; $(5, 5)$; $(2, 4)$; $(5, 3)$

1·12 **குத்துக் கோடுகள் :** AB யும் CD யும் ஒன்றுக்கொன்று குத்தாக உள்ள கோடுகள்.



AB யின் சாய்வு $= \theta$

$\therefore$ CD யின் சாய்வு $= 90 + \theta$

$\therefore$ CD யின் சரிவு $= \tan \theta$

$= \tan (90 + \theta)$

$= \dfrac{-1}{\tan \theta}$

$= \dfrac{1}{\text{AB யின் சரிவு}}$

$\therefore$ AB யின் சரிவு $\times$ CD யின் சரிவு $= -1$.

$\therefore$ இரண்டு கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று குத்துக் கோடுகள் ஆனால் அவற்றின் சரிவுகளின் பெருக்கற் பலன் -1 ஆகும்.

AB ⊥ CD. AB யின் சரிவு $= -\frac{a}{b}$ எனில் CD யின் சரிவு $= \frac{b}{a}$ ஆகும். (அதாவது மாறுபட்ட குறியை உடைய தலைகீழ்ப்பின்னம் ஆகும் – Reciprocal with the sign changed).

மாதிரி: ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகள் $(8, -10)$, $(0, -4)$, $(7, -2)$ எனில், அது செங்கோண முக்கோணம் என்று காட்டு.

A $(8, -10)$

சரிவு AB $= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

B $(0, -4)$

சரிவு BC $= \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$

C $(7, -3)$

சரிவு CA $= \frac{7}{-1} = -7$

A, $(8, -10)$

சரிவு BC $\times$ சரிவு CA $= -1$ $\quad \therefore$ BC ⊥ CA.

$\therefore \angle C = 90°$ $\quad \therefore$ ABC செங்கோண முக்கோணம்.

மாதிரி: $(0, -2)$, $(5, 1)$, $(2, 6)$, $(-3, 3)$ என்ற புள்ளிகளை வரிசையாக எடுத்துக்கொண்டால், அவை ஒரு சதுரத்தின் முனைகள் என்று காட்டு. [M.U.]

சதுரம் என்பது *(i)* ஒரு இணைகரம் *(ii)* அதில் இரண்டு அண்டைப்பக்கங்கள் குத்தாக இருக்கவேண்டும். *(iii)* மூலை விட்டங்களும் குத்தாக அமைய வேண்டும்.

A $(0, -2)$

சரிவு AB $= \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$

B $(5, 1)$

சரிவு BC $= \frac{-5}{3} = \frac{-5}{3}$

C $(2, 6)$

சரிவு CD $= \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

D $(-3, 3)$

சரிவு DA $= \frac{5}{-3} = \frac{-3}{5}$

A $(0, -2)$

சரிவு AB = சரிவு CD

சரிவு BC = சரிவு AD ∴ ABCD ஒரு இணைகரம் *(i)*

சரிவு AB × சரிவு BC $= \frac{3}{5} \times \frac{-5}{3} = -1$ ∴ AB ⊥ BC *(ii)*

சரிவு AC $= \frac{-8}{-2} = 4$;

சரிவு BD $= \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$

சரிவு AC × சரிவு BD $= 4 \times \frac{-1}{4}$ ∴ AC ⊥ BD *(iii)*

∴ ABCD சதுரமாகும்.

[குறிப்பு: இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையிலுள்ள தூரத்தைக் கண்டுபிடிக்கும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தியும் இக்கணக்கைச் செய்யலாம்].

பயிற்சி 10

1. (5, 2), (6, −15) என்ற புள்ளிகள் மூலப்புள்ளியில் செங்கோணத்தைத் தாங்குகின்றன என்று காட்டு.

2. கீழே முக்கோணங்களின் முனை தரப்பட்டுள்ளன. அவை செங்கோண முக்கோணங்களை அடைக்கும் என்று காட்டு.

(i) (1, 2), (2, 3), (−1, 4)

(ii) (4, −1), (5, 0), (2, 1)

(iii) (−10, 8); (−3, 7), (−4, 0)

(iv) (−9, 9), (−2, 8), (−3, 1)

3. ஒரு நாற்கரத்தின் முனைகள் முறையே (5, −1), (11, 7), (8, 10), (2, 4). இது செவ்வகம் என்று காட்டு.

4. (1, −10), (−5, 2), (15, 12), (21, 0) என்பவைகளை முனைகளாக உடைய நாற்கரம் செவ்வகம் ஆகும்.

5. (−2, 2), (0, 4), (−2, 6), (−4, 4) என்பவைகளை வரிசையாகச் சேர்க்கக் கிடைக்கும் உருவம் சதுரம் என்று நிரூபி.

6. கீழே தரப்பட்ட நான்கு புள்ளிகளும் சதுரத்தின் முனைகள் என்று காட்டு.

(2, 5), (4, 7), (2, 9), (0, 7).

முதல் அத்தியாயத்தின் சுருக்கம்

1. **புள்ளி:** ஒரு ஜோடி எண்களால் தரப்படுகிறது. ஆகவே புள்ளி என்றால் ஒரு ஜோடி எண்கள் ஆகும். ஒரு ஜோடி எண்களே புள்ளி என உருவகப்படுத்தலாம்.

2. **இரண்டு புள்ளிகள் :** $A\ (x_1\ y_1)$, $B\ (x_2\ y_2)$ என்பவை இரண்டு புள்ளிகளானால்

(i) $AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

(ii) AB யின் நடுப்புள்ளி $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

(iii) AB யை $m : n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$$

(iv) $k : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k + 1}, \frac{ky_2 + y_1}{k + 1}\right)$$

3. $A\ (x_1\ y_1)$ $B\ (x_2\ y_2)$ $C\ (x_3\ y_3)$ எனில் முக்கோணம் ABC யின் பரப்பு $= \frac{1}{2} \sum (x_1\ y_2 - x_2\ y_1)$.

4. $A\ (x_1\ y_1)$, $B\ (x_2\ y_2)$ வழியே செல்லும் கோட்டின் சரிவு

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ அல்லது } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

5. (i) சரிவு AB = சரிவு CD எனில் AB $\parallel$ CD.

(ii) சரிவு AB = சரிவு BC எனில் A, B, C ஒரே நேர் கோட்டில் அமையும்.

(iii சரிவு AB $= \frac{-1}{\text{சரிவு CD}}$ எனில் AB $\perp$ CD.

சோதனைத்தாள் 1

(1) ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகள் $(1, -1)$, $(4, 3)$, $(-3, 2)$. அதன் சுற்றளவு என்ன? அது எவ்வகை முக்கோணம்?

(2) $(-2, 1)$, $(1, 0)$, $(4, 3)$, $(1, 2)$ என்பவை ஒரு இணைகரத்தின் முனைகள் எனக்காட்டு. மூலை விட்டங்களின் நீளங்களைக் கணக்கிடு.

(3) ஒரு இணைகரத்தின் மூன்று முனைகள் $(2, -2)$, $(-3, -5)$, $(0, 1)$. அதன் நான்காவது முனை $(0, 1)$க்கு எதிராக அமைந்தால் அதன் உறுப்புக்கள் என்ன?

(4) $(-1, 5)$, $(5, -6)$ என்ற புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை (i) X அச்சு (ii) Y அச்சு எந்த விகிதங்களில் பிரிக்கின்றன?

(5) A $(1, 4)$, B $(3, -2)$, C $(-3, 16)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு கோட்டமைவன எனக்காட்டு. AB : BC யைக் கணக்கிடு.

(6) $(-5, 1)$ $(-2, 6)$, $(3, 3)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் முனைகள் எனக் காட்டு.

சோதனைத்தாள் 2

(1) $(-3, 2)$ என்ற புள்ளியை மையமாக உடைய வட்டத்தில் $(-7, 5)$, $(-8, 2)$, $(1, -1)$, $(-3, 3)$ என்ற புள்ளிகள் அமைகின்றன என்று காட்டு. வட்டத்தின் ஆரத்தைக் கணக்கிடு.

(2) ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் $(4, 2)$, $(-4, 6)$, $(-2, -8)$ என்றால் அதன் முனைகளைக் கண்டுபிடி.

(3) $(8, b)$ என்ற புள்ளி $(-13, -1)$, $(-6, 0)$ என்ற புள்ளிகள் வழியே செல்லும் கோட்டில் அமைகிறது என்றால் b யின் மதிப்பு என்ன? $(8, b)$ என்ற புள்ளி மற்ற இரு புள்ளிகளுக் கிடையே யுள்ள தூரத்தில் எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கிறது?

(4) $(2, 1)$; $(-4, -8)$; $(0, -2)$; $(1, -\frac{1}{2})$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு கோட்டமைவன என்று காட்டு.

(5) $(1, -2)$, $(6, 1)$, $(3, 6)$, $(-2, 3)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு சதுரத்தின் முனைகள் என்று நிரூபி.

சோதனைத்தாள் 3

(1) ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தின் முனைகள் $(-4, 6)$, $(8, 1)$ ஆனால், விட்டத்தின் நீளம் என்ன? வட்டத்தின் மையத்தையும் காண்க.

(2) $(-5, -8)$, $(-2, 3)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டுத் துண்டை $(1, 14)$ என்ற புள்ளி என்ன விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

(3) $(4, -2)$ $(8, 7)$, $(-5, 1)$, $(-3, -2)$ எனும் புள்ளிகள் ஒரு நாற்கரத்தின் முனைகளென்றால் அதன் பரப்பைக் காணவும்.

(4) $(3, 5)$, $(-2, -1)$, $(-5, 7)$ என்ற மூன்று புள்ளிகள் ஒரு இணைகரத்தின் முனைகளென்றால் நான்காவது முனையின் உறுப்புக்கள் என்ன?

2. வரையின் சமன்பாடு

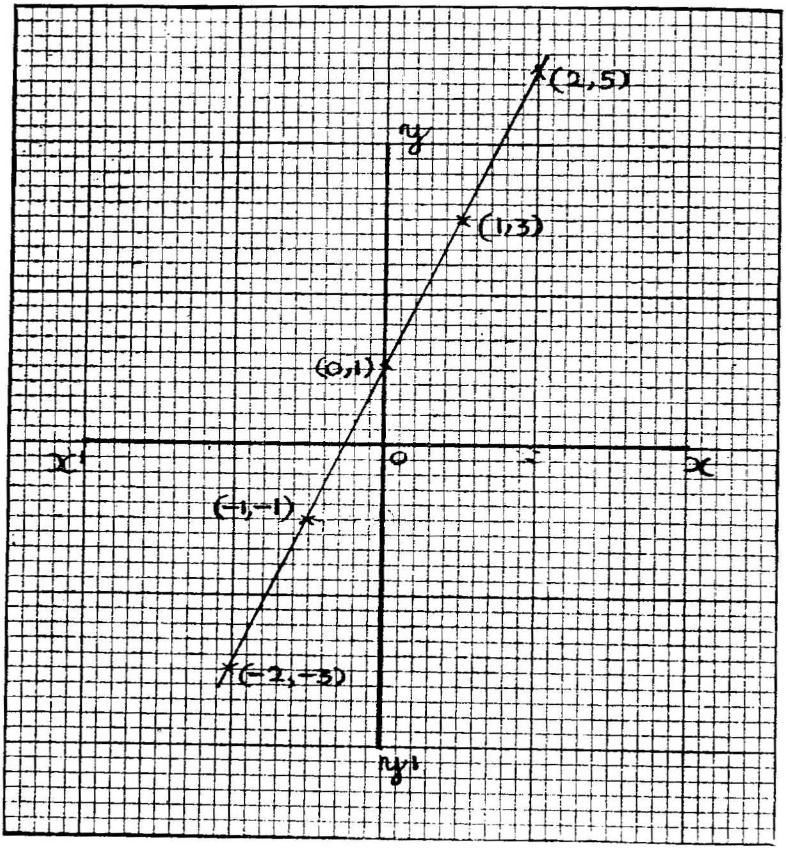
2.1 **சமன்பாட்டின் வரைப்படம்:** தளத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியை இரட்டை எண்களால் குறிக்கும் ஒரு வகையைக் கூறினேம். அந்த ஜோடி எண்கள் ஒன்றுக்கொன்று குறிப்பிட்ட தொடர்புடையனவாஞல் அவைதரும் புள்ளிகள் எவ்வாறு அமைகின்றன என்று பார்ப்போம். x, y என்ற இரு எண்களிடையே உள்ள தொடர்பு $f(x, y) = 0$ என்ற சமன்பாட்டால் தரப்படும். அதாவது ஒரு எண் மற்றதைச் சார்ந்து நிற்கிறது என அறிகிரேம்.

எடுத்துக்காட்டாக $y = 2x + 1$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். xக்கு நம் இச்சைப்படி மதிப்புகள் கொடுக்கலாம். ஆனல் yன் மதிப்பு சமன்பாட்டுக்கு — அதன் விதிக்கு — அடங்கினதாய் இருக்கவேண்டும். அத்தகைய எண் இணைகளைக் கீழ்க் கண்ட அட்டவணையில் அமைப்போம்.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-5	-3	-1	1	3	5	7	9

[பின்னங்களையும் மதிப்பாகத் தரலாம்]

மேலே ஒன்றன் கீழ் ஒன்ருக எழுதப்பட்டுள்ள இணை எண்கள் மேற்கூறிய தொடர்புடையன. இப்புள்ளிகளைப் படத்தில் குறிப்போம். அப்புள்ளிகள் ஒழுங்காக ஒரு நேர்கோட்டில் அமைவதைக் காணலாம். இந்த நேர்கோடு சமன்பாட்டின் வரைப்படம் எனப்படும்.



இதனுல் நாம் அறிவது :

(i) சமன்பாட்டிற்கு அடங்கிய ஜோடி எண்கள் தரும் புள்ளிகள் வரைப்படத்தில் அமைகின்றன.

(ii) வரைப்படத்தில் எந்தப் புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டாலும் அவற்றின் உறுப்புக்கள் சமன்பாட்டிற்கு அடங்கியவை.

(iii) சமன்பாட்டிற்கு அடங்காத எண் ஜோடிகள் தரும் புள்ளிகள் வரைப்படத்தில் அமையா.

அதாவது $f(a, b) = 0$ எனில் (a, b) என்ற புள்ளி $f(x, y) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைப்படத்தில் அமையும்.

குறிப்பு : $f(x, y) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைப்படம் என்று கூறுவதற்குப் பதிலாக $f(x, y) = 0$ என்ற வரை என்றே கூறுவோம்.

மாதிரி 1 : $(1, 2)$, $(2, -5)$, $(3, 7)$ என்ற புள்ளிகளில் எவை $x^2 + xy + 2y^2 = 44$ என்ற வரையில் அமையும் ?

சமன்பாடு $f(x, y) \equiv x^2 + xy + 2y^2 - 44 = 0$

(i) $f(1, 2) \equiv 1 + 2 + 8 - 44 \neq 0$

$\therefore$ $(1, 2)$ வரையில் அமைவதில்லை.

(ii) $f(2, -5) = 4 - 10 + 50 - 44 = 0$

$\therefore$ $(2, -5)$ சமன்பாட்டிற்கு அடங்கியது.

(iii) $f(3, 7) = 9 + 21 + 98 - 44 \neq 0$

$\therefore$ $(3, 7)$ வரையில் அமைவதில்லை.

மாதிரி 2 : $x^2 - 3xy + x^3 + 8 = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் அமையும் ஒரு புள்ளியின் y உறுப்பு -2 எனில் x உறுப்பு என்ன ?

x உறுப்பு x_1 ஆகுக.

$\therefore$ புள்ளி $(x_1, -2)$ வரையில் அமைகிறது.

$$\therefore \quad x_1^2 - 6x_1 - 8 + 8 = 0$$

$$x_1^2 + 6x_1 = 0$$

$$x_1(x_1 + 6) = 0$$

$\therefore$ $x_1 = 0$ அல்லது -6

$\therefore$ x உறுப்பு 0 அல்லது -6 ஆகும். [y உறுப்பு -2 ஆக உள்ள புள்ளிகள் இரண்டு வரையின் மேல் உள்ளன. அதில் ஒன்று y அச்சின் மேல் அமைகிறது].

மாதிரி 3 : புள்ளி $(7t+1, 3t-1)$ என்பது $8x-7y+5=0$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைப்படத்தில் அமைந்தால் அப்புள்ளியைக் கண்டுபிடி.

$(7t + 1)$, $(3t - 1)$ என்பது சமன்பாட்டிற்கு அடங்கிய எண் ஜோடிகள். $\therefore$ பிரதியிட

$$8(7t + 1) - 7(3t - 1) + 5 = 0$$

$$56t + 8 - 21t + 7 + 5 = 0$$

$44t + 22 = 0$

$\therefore \quad t = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ புள்ளி $= \left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \right)$

பயிற்சி 11

(1) கீழே தரப்பட்டவைகளில் எவையெவை $x^2 + y^2 = 25$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடத்தில் அமையும்?

$(3, 2)$; $(4, 3)$, $(-4, 3)$, $(7, 1)$,

$(0, 5)$; $(0, -5)$, $(\sqrt{21}, 2)$, $(\sqrt{13}, \sqrt{12})$.

(2) $(2, 8)$ என்ற புள்ளி $xy = c^2$ என்ற வரையில் அமைகிறது. c யின் மதிப்பு என்ன?

(3) $[(5t - 4), (t + 1)]$ என்ற புள்ளி $7x = 4y - 1$ என்ற வரையில் அமைந்தால் புள்ளியைக் கண்டுபிடி.

(4) $(3, -5)$, $(-2, 1)$ என்ற புள்ளிகள் $y = mx + c$ என்ற வரையில் அமைவதாயின், m, c யின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

5. $lx + my = 1$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடம் $(1, -2)$, $(4, 0)$ என்ற புள்ளிகள் வழியே செல்வதாயின் l, m ன் மதிப்புக்களைக் கண்டுபிடி?

(6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற வரையில் $(1, -2)$; $(2, -3)$ என்ற புள்ளிகள் அமைந்தால் a, b ன் மதிப்புக்கள் என்ன?

(7) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வரையில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் அமைகின்றன என்றால் g, f, c யின் மதிப்புக்களைக் கண்டுபிடி.

(i) $(6, 0)$, $(0, 8)$, $(0, 0)$

(ii) $(3, -4)$, $(-2, 1)$, $(-3, -1)$

(iii) $(2, 3)$, $(4, -3)$, $(5, -2)$

2·2 **வரையின் சமன்பாடு :** x, y என்ற இணை எண்களின் தொடர்பை $f(x, y) = 0$ என்ற சமன்பாடு தருகிறது. அத்தகைய எண் ஜோடிகள் தரும் புள்ளிகள் ஒழுங்காக ஒரு வரையில் அமை கின்றன என்று கூறினேம்.

இந்நூலில் சில விதிகளுக்கு உட்பட்டு ஒழுங்காக அமையும் புள்ளித் தொகுதிகளில், புள்ளிகளின் எண்கள் எத்தகைய தொடர் புடையன என்பதைக் காண்போம்.

சிலவிதிகளுக்குக் கட்டுபட்டு அமையும் புள்ளித் தொகுதிக்கு (set of points) வரை என்று பெயர். விதிக்கேற்ப வரைகளுக்கும் பெயர்கள் உண்டு. எடுத்துக் காட்டாக ஒரு நிலையான புள்ளியி லிருந்து ஒரே தூரத்தில் அமையும் புள்ளிகள் சேர்ந்த தொகுதி (புள்ளியின் நியமப்பாதை) **வட்டம்** எனப்படும். அந்த நிலையான புள்ளி வட்டத்தின் **மையம்** எனவும், அந்த தூரம் வட்டத்தின் **ஆரம்** எனவும் அழைக்கப்படும். இவ்வாறு புள்ளிகள் ஒவ் வொன்றும் ஒரே நியமத்திற்கு உட்பட்டு இருந்தால், அவற்றின் x, y உறுப்புக்கள் ஒரே தொடர்பு உடையனவாக இருக்கும். இத்தொடர்பைத் தரும் சமன்பாட்டுக்கு **வரையின் சமன்பாடு** (Equation of the curve) என்று பெயர்.

[‘ புள்ளி ’ என்றால் எவ்வாறு ஒரு ‘ ஜோடி எண்கள் ’ என்று சொல்லுகிறோமோ, அதேபோல வரை என்றால் ‘ $f(x, y) = 0$ என்ற சமன்பாடு ’ என்று உருவகப் படுத்துவோம்].

ஒரு வரையின் சமன்பாட்டைக் காண :

(i) $P(x, y)$ என்பது ஒரு விதிக்கு உட்பட்டு அமையும் புள்ளி களில் ஒன்று எனக் கொள்க.

(ii) முதல் அத்தியாயத்தில் கண்ட சூத்திரங்களைப் பயன் படுத்தி (x, y) என்ற எண்களின் தொடர்பைக் காண்க. ‘விதி’யில் தூரம், சரிவு அல்லது திசை, கோணம், பரப்பு ஆகியவை வரும். இவைகளுக்கேற்ற சூத்திரங்களில் $f(x, y) = 0$ என்ற சமன் பாட்டை வரவழைக்கவும்.

(iii) வரையில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் அதே நியமத் திற்கு உட்பட்டதால் ஒவ்வொன்றின் ஜோடி எண்களும் இதே தொடர்பையுடையனவாக இருக்கும். ஆகவே $f(x, y) = 0$ என்பது வரையின் சமன்படு ஆகும்.

குறிப்பு : விதி அல்லது நியமத்திற்குட்பட்ட புள்ளித் தொகுதி என்று கூறுவதற்குப் பதிலாக ஒரு நியமத்திற்கு உட்பட்டு இயங்கும் புள்ளியின் பாதை (Locus of a point) அல்லது ஒரு புள்ளியின் இயங்கு வரை அல்லது நியமப் பாதை என்று கூறுவது வழக்கம். புள்ளியின் ஒவ்வொரு நிலையும் (position) (x, y) என்ற எண்களால் தரப்படும். இத்தகைய எண்களின் தொடர்பு நியமப் பாதையின் சமன்பாடு எனப்படும்.

மாதிரி : ஒரு வரையில் அமையும் புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றின் x அச்சிலிருந்து உள்ள தூரம், (O, a) என்ற புள்ளியிலிருந்து உள்ள தூரத்திற்குச் சமம் எனில் அதன் சமன்பாடு என்ன ?

புள்ளி $P(x\ y)$ ஆகுக. X அச்சிலிருந்து தூரம் y. (O, a) யிலிருந்து தூரம் $\sqrt{x^2 + (y-a)^2}$

$$\therefore \quad \sqrt{x^2 + (y-a)^2} = y$$

$$\therefore \quad x^2 + (y-a)^2 = y^2$$

$$\therefore \quad x^2 - 2ay + a^2 = 0$$ என்பதுதான் வரையின் சமன்பாடு.

மாதிரி: ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தின் முனைகள் $A(x_1\ y_1)$, $B(x_2\ y_2)$ ஆகும். வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன? இங்கு நியதி வெளிப்படையாகத் தரப்படவில்லை.

$P(x, y)$ என்பது வட்டத்தில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியானால், $AP \perp BP$ என்பதுதான் விதி.

$$\therefore \quad \text{சரிவு } AP \times \text{சரிவு } BP = -1$$

$$\therefore \quad \frac{y-y_1}{x-x_1} \cdot \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1.$$

$$\therefore \quad (x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$$

என்பதுதான் $A(x_1\ y_1)$ $B(x_2\ y_2)$ என்ற விட்டத்தையுடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு ஆகும்.

பயிற்சி 12

1. $(-1, 0)$ $(2, 3)$ என்ற இரு புள்ளிகளிலிருந்து சம தூரத்தில் இயங்கும் புள்ளியின் நியமப் பாதையின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

2. $(-1, -2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து 5 அலகு தூரத்தில் இயங்கும் புள்ளியின் நியமப் பாதையின் சமன்பாடு என்ன?

3. ஒரு வட்டத்தின் மையப் புள்ளி (h, k). அதன் ஆரம் a அலகு. வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

4 $(2, 3)$, $(-4, 2)$ஐ முனைகளாகவுடைய விட்டத்தைக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

5. ஒரு புள்ளி y அச்சிலிருந்து உள்ள தூரத்தைப்போல், R மடங்கு இருக்குமாறு நகருகிறது. அதன் நியமப் பாதையின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

6. A $(2, 3)$ B $(-1, 2)$ என்பவை இரு புள்ளிகள். முக்கோணம் APB யின் பரப்பு 20 ச. அலகுகள் இருக்குமாறு P என்ற புள்ளி நகருகிறது. அதன் நியமப் பாதையின் சமன்பாடு $x - 5y + 27 = 0$ அல்லது $x - 5y = 13$ என்று காட்டு.

3. நேர் கோடு

3.1 A $(x_1\ y_1)$ என்ற புள்ளி வழியாக சரிவு 'm' ஆக இருக்கும் நேர் கோட்டின் சமன்பாடு:

P (x, y) என்பது அந்த நேர் கோட்டில் ஒரு புள்ளி ஆகுக.

சரிவு AP $= m$ ...... (கொள்கை) ஆனால் சரிவு AP $= \dfrac{y-y_1}{x-x_1}$

$$\therefore \quad \frac{y-y_1}{x-x_1} = m$$

$\therefore$ m என்ற சரிவுடன் A $(x_1\ y_1)$ வழியே செல்லும் நேர் கோட்டின் சமன்பாடு $y - y_1 = m\,(x - x_1)$ ஆகும்.

குறிப்பு 1. புள்ளி A (o, c) ஆனால் நேர் கோட்டின் சமன்பாடு $y - c = m\,(x - o)$

$$\therefore \quad y \;=\; mx + c$$

இந்த சமன்பாட்டில் m என்பது நேர் கோட்டின் சரிவு என்றும் c என்பது நேர்கோடு y அச்சை மூலப் புள்ளியிலிருந்து வெட்டும் தூரம் என்பதும் உணர்க. இதற்கு நேரடியான நிரூபணம் கீழே தரப்படுகிறது.

மாதிரி: $2x - 3y + 8 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை 'சரிவு உருவத்தில்' மாற்றி நேர் கோட்டின் சரிவையும், அது y அச்சை வெட்டும் புள்ளி, மூலப் புள்ளியிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் உள்ளது என்றும் கண்டுபிடி.

$$2x - 3y + 8 = 0$$

$$\therefore \quad 3y \;=\; 2x + 8$$

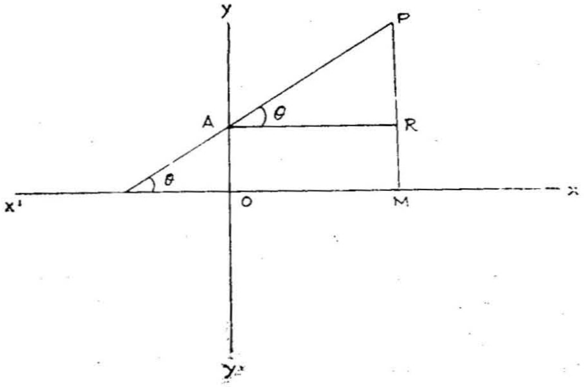
$$\therefore \quad y \;=\; \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

$\therefore$ நேர் கோட்டின் சரிவு $= \frac{2}{3}$

அது y அச்சை வெட்டும் புள்ளி, மூலப் புள்ளியிலிருந்து உள்ள தூரம் $\frac{8}{3}$ அலகு.

3.2 நேர் கோட்டின் சமன்பாட்டை $y = mx + c$ என்ற வடிவத்தில் காண:

நேர் கோட்டின் சரிவு m ஆகுக: அது y அச்சை A எனும் புள்ளியில் வெட்டட்டும் OA = C ஆகுக. P (x, y) நேர்கோட்டில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி ஆகுக. PM, x அச்சுக்குக் குத்தாகுக. AR எனும் கோடு PM க்குக் குத்தாகுக.



$\therefore$ AR = OM = X

RP = MP − MR = MP − OA = $y - c$

கோட்டின் சாய்வு, அதாவது x அச்சுடன் ஏற்படும் கோணம் θ என்றால் சரிவு $m = \tan\theta$ ஆனால் RAP = θ

$$\therefore \tan\theta = \frac{RP}{AR}$$

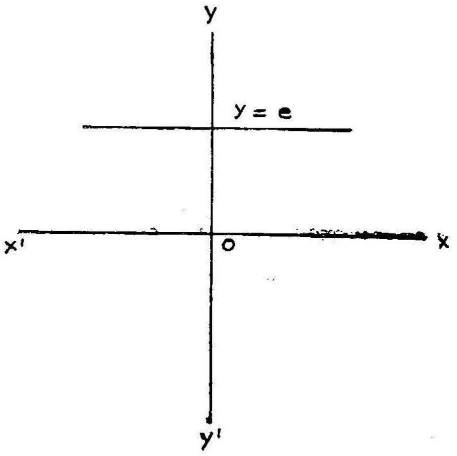
$$\therefore m = \frac{y-c}{x}$$

$$\therefore mx = y - c$$

$$\therefore y = mx + c$$

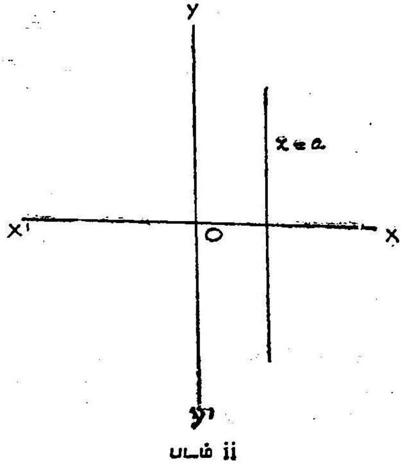
என வருகிறது. ஆகவே ஒரு நேர்கோட்டின் சரிவு, m எனவும், y அச்சில் அது வெட்டும் துண்டு c எனவும் ஆனால் அதன் சமன்பாடு $y = mx + c$ ஆகும்.

குறிப்பு: $y = mx + c$ என்ற சமன்பாட்டில் $m = 0$ ஆனல் $y = c$ எனச் சமன்பாடு வருகிறது; $m = 0$ என்ருல் கோடு x அச்சுக்கு இணையாகும்; $y = c$ என்பது



படம் i

x அச்சுக்கு இணையாக, x அச்சிலிருந்து 'c' தூரத்தில் உள்ள நேர் கோட்டின் சமன்பாடாகும். அதாவது இந்த நேர் கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளின் x உறுப்புக்கள் ஏதாயினும் y உறுப்பு மாருமல் 'c' ஆகவே இருக்கிறது. (படம் i பார்க்கவும்) cயும் o ஆனல் சமன்பாடு $y = o$ என ஆகிறது. ஆகவே $y = o$ என்பது x அச்சின் சமன்பாடாகும்.



படம் ii

இதேபோல $x = a$ என்பதன் பொருள், y உறுப்பு ஏதாயினும், புள்ளியின் x உறுப்பு 'a' என்பதாகும். (படம் ii பார்க்கவும்) இது y அச்சுக்கு 'a' தூரத்தில் உள்ள இணை கோட்டைக் குறிக்கிறது. ஆகவே $x = 0$ என்பது y அச்சின் சமன்பாடாகும்.

பயிற்சி 13

1. கீழேயுள்ள சமன்பாடுகள் தரும் கோடுகளின் சரிவுகளைக் கண்டுபிடி.

(i) $y = 3x + 5$ (v) $4y = 8x - 3$

(ii) $y = 2x + 8$ (vi) $5y = 7x - 8$

(iii) $y = x - 10$ (vii) $4x - 3y + 5 = 0$

(iv) $y = \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}$ (viii) $x + 4y = 8$

2. நேர்கோட்டின் சரிவும், கோட்டில் அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளியும் தரப்பட்டுள்ளன. நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

புள்ளி :	$(2, 5)$	$(-5, -3)$	$(4, -3)$	$(0, -3)$	$(0, 0)$
சரிவு :	3	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{8}{7}$	m

3·3 இரண்டு புள்ளிகள் வழியே செல்லும் நேர் கோட்டின் சமன்பாடு.

A $(x_1\ y_1)$ B $(x_2\ y_2)$ என்பவை இரு புள்ளிகள். P (x, y) என்பது AB என்ற நேர் கோட்டில் உள்ள ஒரு புள்ளி.

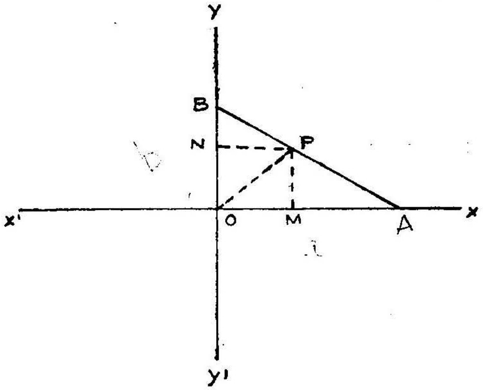
$\therefore$ சரிவு AP = சரிவு AB

$$\therefore \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

இதுதான் தேவையான சமன்பாடு ஆகும். இதை

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$ எனவும் எழுதலாம்.

3·4 நேர் கோட்டின் சமன்பாட்டை $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ எனும் வடிவத்தில் காண :



நேர்கோடு x அச்சை A யிலும், y அச்சை B யிலும் வெட்டட்டும். OA = a, OB = b ஆகுக. P (x, y) நேர் கோட்டில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியாகுக: PM, x அச்சுக்குக் குத்தாகவும் PN, y அச்சுக்குக் குத்தாகவும் வரைக.

$\therefore$ PN = x; PM = y

$\triangle$ OAP + $\triangle$ OPB = $\triangle$ OAB

$\therefore \frac{1}{2}$ OA · MP + $\frac{1}{2}$ OB · PN = $\frac{1}{2}$ OA · OB

$\therefore \frac{1}{2}\, a \cdot y + \frac{1}{2}\, b \cdot x = \frac{1}{2}\, a\, b$

$\therefore bx + ay = ab$

abஆல் வகுக்க $\therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

குறிப்பு: இதை 3 · 3இல் கண்ட பொதுச் சூத்திரத்தி லிருந்தும் காணலாம்; A (a,o) B (o,b) என்பவை புள்ளிகளானல்

சமன்பாடு $\frac{x-a}{o-a} = \frac{y-o}{b-o}$

$\therefore bx - ab = -ay$

$\therefore bx + ay = ab$

$\therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$

∴ நேர்கோடு x அச்சில் a அலகு நீளமுள்ள துண்டையும் y அச்சில் b அலகு நீளமுள்ள துண்டையும் வெட்டினுல் அந்நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ஆகும் என்று தெரிகிறது.

பயிற்சி 14

1. சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தாமல் அடிப்படை மூலம் கீழ்க்கண்ட புள்ளிகள் வழியே செல்லும் நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

(i) $(2, 5), (7, 3)$ (ii) $(-3, -2), (4, -7)$
(iii) $(-3, -4), (-5, -3)$ (iv) $(1, 2), (0, 0)$
(v) $(-3, -8)$ $(3, 8)$ (vi) $(5, -4), (-5, 4)$.

2. x அச்சு, y அச்சு இவைகளை மூலப்புள்ளியிலிருந்து நேர் கோடு வெட்டும் தூரம் தரப்பட்டுள்ளது. நேர்கோட்டின் சமன் பாட்டை எழுது.

$(5, 7)$; $(-5, -8)$; $\left(\frac{5}{3}, -\frac{9}{4}\right)$

$\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\right)$; $\left(-\frac{3}{7}, -\frac{2}{3}\right)$

3·7 நேர் கோட்டுச் சமன்பாட்டின் பொது உருவம்.

ஒரு புள்ளியும் அதன் வழியே செல்லும் நேர்கோட்டின் திசையும் தரப்பட்டால், அதன் சமன்பாடு என்ன என்பதைக் கண்டோம். அவ்வாறே இரண்டு புள்ளிகள் வழியே செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டையும் கண்டோம். நேர்கோட்டில் அமையும் புள்ளிகள் யாவும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரே திசையில் அமைபவை என்பதைப் பயன்படுத்தி, சமன்பாட்டைக் கண்டோம். இது நேர்கோட்டிற்கே உரிய தனிப்பண்பு ஆகும். இப்படிக் காணப்பட்ட சமன்பாடுகள் x, yல் ஒருபடிச் சமன்பாடுகளாக இருப்பதையும் அறிகிறோம்.

மறுதலையாக, ஒவ்வொரு ஒருபடிச் சமன்பாட்டின் வரைப் படமும் நேர்கோடுகள் ஆகும் என்பதைக் காண்போம்.

$ax + by + c = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு நேர்கோடாகும்.

நிரூபணம் : A $(x_1 y_1)$ B $(x_2\ y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளும் $ax + by + c = 0$ என்ற சமன்பாடு தரும் வரையில் அமையட்டும்.

$$\therefore\ ax_1 + by_1 + c = 0.$$

$$\therefore\ ax_2 + by_2 + c = 0.$$

$$\therefore\ a\,(x_1 - x_2) + b\,(y_1 - y_2) = 0$$

$$\therefore\ \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{a}{b}.$$

$\therefore$ சரிவு AB $= -\dfrac{a}{b}\cdot$

$\therefore$ Aயிலிருந்து Bயின் திசையானது B வரையில் எங்கிருப்பினும் மாறுவதில்லை.

$\therefore$ புள்ளி B, $-\dfrac{a}{b}$ என்ற சரிவையுடைய நேர்கோட்டில் இருக்கவேண்டும்.

$\therefore$ $ax + by + c = 0$ என்பது $-\dfrac{a}{b}$ என்ற சரிவையுடைய நேர்கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

மறுதலை : $-\dfrac{a}{b}$ என்ற சரிவையுடைய கோட்டின் சமன்பாடு $ax + by + c = 0$ ஆகும்.

கோடு $(x_1\ y_1)$ வழியே செல்வதாக இருந்தால்

$ax_1 + by_1 + c = 0 \qquad \therefore\ -c = ax_1 + by_1.$

$\therefore$ கோட்டின் சமன்பாடு $ax + by = -c.$

அதாவது $ax + by = ax_1 + by_1$

$\therefore$ $(\mathbf{x_1\ y_1})$ என்ற புள்ளி வழியாக $-\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ என்ற சரிவில் **செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $\mathbf{ax + by = ax_1 + by_1}$.**

[ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு எழுத இதுவே எளிய முறையாகும். ஒரு புள்ளியும், சரிவும் கண்டுபிடித்து சமன்பாட்டை உடனே எழுதலாம்].

மாதிரி: (i) $-\frac{2}{3}$ என்ற சரிவுடன் (1, 2) என்ற புள்ளி வழியே செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு ,

$$2x + 3y = (2 \times 1) + 3(2)$$

அதாவது $2x + 3y = 8$

(ii) $\frac{4}{5}$ என்ற சரிவுடன் (−1, 5) என்ற புள்ளி வழியே செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$4x - 5y = 4 \times (-1) - (5 \times 5)$$

அதாவது $4x - 5y = -29.$

மாதிரி: A (−3, −4), B (−1, 5) என்ற புள்ளிகள் வழியே செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

$\mathbf{A} = (-3, -4)$; $\mathrm{B} = (-1, 4)$

$\therefore$ சரிவு $\mathrm{AB} = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}.$

$\therefore$ சமன்பாடு $9x - 2y = 9 \times -3 - 2 \times (-4)$

அதாவது $9x - 2y = -19.$

பயிற்சி 15

1. நேர்கோட்டில் அமையும் புள்ளியும் சரிவும் தரப் பட்டுள்ளன. சமன்பாட்டை எழுது.

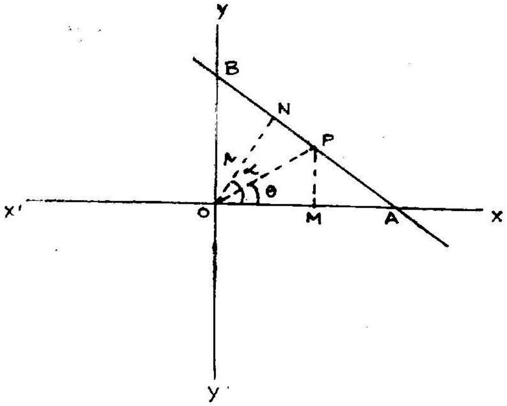
	புள்ளி	சரிவு		புள்ளி	சரிவு
i.	$x_1 y_1$	$-\frac{a}{b}$	vi.	(−1, −2)	$-\frac{7}{2}$
ii.	(2, 3)	$-5/6$	vii.	(−3, 0)	$\frac{5}{3}$
iii.	(3, −1)	$\frac{2}{3}$	viii.	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$	-3
iv.	(−4 −5)	5	ix.	$(at^2, 2at)$	$\frac{1}{t}$
v.	(1, 0)	-3			

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் வழியே செல்லும் நேர் கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

(i) (2, 3), (5, 4)
(ii) (1, 9), (5. 3)
(iii) (4, −2), (−8, 5)
(iv) (−6, −1), (7, 2)
(v) (0, 0), (5, −4).
(vi) (3, −5), (5, −5)
(vii) (5, 2), (5, −3)
(viii) $(t_1^2\ 2t_1)\ (t_2^2, 2t^2)$
(ix) $\left(t_1, \frac{1}{t_1}\right), \left(t_2, \frac{1}{t_2}\right)$

3·5 ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$x \cos a + y \sin a = p$ எனவும் அமையும்.



x' O x, y' O y எனும் ஒன்றற்கொன்று குத்துக்கோடுகள், முறையே x, y அச்சுக்களாகுக. AB என்பது ஒரு நேர்கோடு ON என்பது AB க்குக் குத்துக்கோடு. அதன் நீளம் ON $= p$ ஆகுக. அதன் சாய்வு 'a' ஆகுக. P (x, y) என்பது AB எனும் நேர்கோட்டில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. (x, y) என்ன தொடர்பில் அமைகிறதோ அதுவே நேர்கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

OP $= r$ ஆகுக ; $\angle$ XOP $= \theta$ $\therefore$ $x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$
ஆனல் OP $\cos (a - \theta) = p$

$$\therefore\ r \cos (a - \theta) = p$$

$$\therefore\ r \cos \theta \cos a + r \sin \theta \sin a = p$$

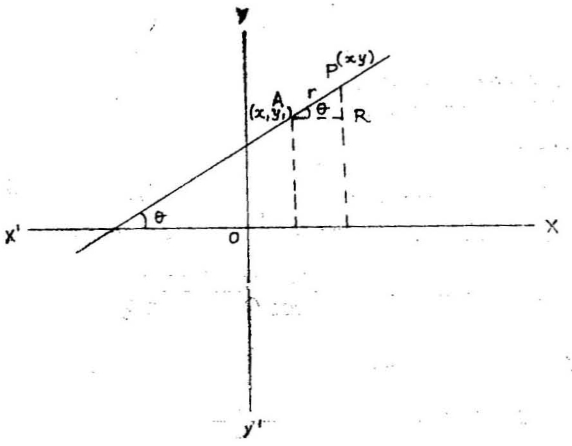
$$\therefore\ x \cos a + y \sin a = p$$

என (x, y) இடையேயுள்ள தொடர்பு வருகிறது.

∴ ABயின் சமன்பாடு

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ எனவாகிறது.

3.6 நேர்கோட்டின் துணை அலகுச் சமன்பாடு (Parametric equation of the straight line): $x' O x$; $y' O y$ என்பவை



அச்சுக்கோடுகள். $A(x_1\ y_1)$ என்பது ஒரு புள்ளி A வழி θ சாய்வில் AP எனும் கோடு உள்ளது. $P(x, y)$ என்பது நேர் கோட்டில் ஒரு புள்ளி. $AP = r$ ஆகுக. AR, PR, x, y அச்சுக் களுக்கு இணைகோடுகள் ∴ $\angle ARP' = 90°$

$$AR = (x - x_1) \qquad RP = (y - y_1)$$

ஆனால் $AR = AP \cos \theta \qquad RP = AP \sin \theta$

$$\therefore \quad x - x_1 = r \cos \theta \qquad y - y_1 = r \sin \theta$$

$$\therefore \quad x = x_1 + r \cos \theta \qquad y = y_1 + r \sin \theta$$

இவ்வாறு P யின் (x, y) உறுப்புக்கள் தனித்தனியே 'r'இன் சார்பலனாகத் தரப்படுகிறது. இவ்வாறு (x, y) உறுப்புக்கள் தனித்தனியே மற்றொரு மாறி (variable) யின் சார்பலனாகத் தரப் பட்டால் (அதாவது நேரடியாகத் தொடர்பு தரப்படாமல்) அத்தகைய சமன்பாடு வரையின் துணை அலகுச் சமன்பாடு எனப் படும். 'x', y இவை 'r' எனும் எண்ணால் அளக்கப்படுவதால் 'r' துணைஅலகு (Parameter) எனப் பெயர்பெற்றது.

மாதிரி : A $(x_1\ y_1)$ என்ற புள்ளிவழி 'θ' சாய்வில் செல்லும் ஒரு கோடு $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டை N எனும் புள்ளியில் வெட்டுகிறது. AN இன் அளவைக் காணவும்.

A $(x_1\ y_1)$ வழி 'θ' சாய்வில் செல்லும் கோட்டின் துணை அலகுச் சமன்பாடு $x = x_1 + r\cos\theta$

$$y = y_1 + r\sin\theta$$

இந்தக்கோடு $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டை வெட்டும் புள்ளி N இன் தூரத்தை A யிலிருந்து கணக்கிட, (x, y) க்குப் பிரதியிடவும்.

$$\therefore\ a(x_1 + r\cos\theta) + b(y_1 + r\sin\theta) + c = 0$$

$$\therefore\ r(a\cos + b\sin\theta) = -(ax_1 + by_1 + c)$$

$$\therefore\ AN = r = -\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{a\cos\theta + b\sin\theta}$$

மாதிரி : $(4_1\ 1)$ என்ற புள்ளிவழிச் செல்லும் ஒரு கோடு $3x - y = 0$ என்ற கோட்டை, $\frac{11\sqrt{2}}{4}$ தூரத்தில் வெட்டுகிறது என்றால் கோட்டின் சாய்வு என்ன? (M.U.)

மேல் சூத்திரத்தில் $a = 3$; $b = -1$ $x_1 = 4_1\ y_1 = 1\ r = \frac{11\sqrt{2}}{4}$ பிரதியிட $\frac{11\sqrt{2}}{4} = -\frac{(12-1)}{3\cos\theta - \sin\theta}$

$$\therefore\ 3\cos\theta - \sin\theta = \frac{-4}{\sqrt{2}}$$

$\therefore\ \theta = 135°$ என்பது ஒரு மதிப்பு [சமன்பாட்டைப் பார்த்ததில் இது தெரிகிறது]. ஆகவே ஒரு கோட்டின் சாய்வு 135°

மாதிரி : $y = \frac{3}{4}x + 1$ என்ற நேர் கோட்டின் சமன்பாட்டை 'r' துணை அலகுச் சமன்பாட்டு வடிவத்தில் எழுதவும். துணை அலகுச்சமன்பாடு

$$x = x_1 + r\cos\theta$$

$$y = y_1 + r\sin\theta$$

ஆகும். இதில் $(x_1\ y_1)$ நேர்கோட்டில் அமையும் புள்ளி; 'θ' கோட்டின் சாய்வு.

$(0, 1)$ என்பது $y = \frac{3}{4}x + 1$ என்ற கோட்டில் ஒரு புள்ளி. அதன் சரிவு $\tan\theta = \frac{3}{4}$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{3}{5}; \quad \cos\theta = \frac{4}{5}$$

∴ கோட்டின் துணை அலகுச் சமன்பாடு

$$x = x_1 + r\cos\theta \qquad \therefore \quad x = \frac{4}{5}r$$

$$y = y_1 + r\sin\theta \qquad y = 1 + \frac{3}{5}r$$

பயிற்சி 16

1. கீழ்க்கண்ட கோடுகளைத் துணைஅலகுச் சமன்பாட்டில் எழுதவும்.

(i) $y = x + 3$ (ii) $y = -x + 2$

(iii) $y = \sqrt{3}x - 1$ (iv) $= \frac{x}{\sqrt{3}} + 5$

(v) $y = -\sqrt{3}\,x +$ (vi) $12y = 5x - 24$

2. $(1, 2)$ என்ற புள்ளிவழிச் செல்லும் ஒரு நேர்கோடு $3x + 4y - 15 = 0$ என்ற நேர்கோட்டை புள்ளியிலிருந்து $5\sqrt{2}_7$ அலகு தூரத்தில் வெட்டுகிறது. கோட்டின் சாய்வு என்ன?

இரண்டு நேர்கோடுகள்

3.8 **இணை கோடுகள்: (Parallel Lines)** $(x_1\, y_1)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்லும் $ax + by + c = o$ என்ற சமன்பாட்டின் நேர் கோட்டிற்கு இணையாகவுள்ள நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $ax + by = ax_1 + by_1$.

$ax + by + c = o$ என்ற நேர்கோட்டின் சரிவு $= -\frac{a}{b}$

∴ அதற்கு இணையாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சரிவு $= -\frac{a}{b}$ ஆகும். மேலும் அது $(x_1\, y_1)$ வழியே செல்லுகிறது.

∴ **$\mathbf{ax + by + c = o}$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாக $\mathbf{(x_1\, y_1)}$ வழியே செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு**

$$\mathbf{ax + by = ax_1 + by_1}$$

மாதிரி: $5x - y = 8$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாக $(1, -3)$ வழியே செல்லும் இணைகோட்டின் சமன்பாடு

$$5x - y = 5(1) - (-3)$$

அதாவது $5x - y = 8$ ஆகிறது.

(இவ்வாறு இணைகோட்டின் சமன்பாட்டை உடனே எழுதப் பழகவும்)

மாதிரி: $(1, \frac{1}{2})$ என்ற புள்ளி வழியாகவும் $(4, 5)$, $(2, -8)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டிற்கு இணையாகவும் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

A $(4, 5)$

B $(2, -8)$

$\therefore$ சரிவு ABக்கு இணையான கோட்டின் சரிவு $= \frac{13}{2}$

$\therefore$ $\frac{13}{2}$ என்ற சரிவுடன் $(1, \frac{1}{2})$ என்ற புள்ளிவழியே செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $13x - 2y = 13 - 2 \times \frac{1}{2}$ அதாவது $13x - 2y = 12$.

பயிற்சி 17

1. புள்ளிகளும், கோடுகளும் தரப்பட்டுள்ளன. அப்புள்ளி வழியே அக்கோட்டிற்கு இணையாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

	புள்ளி	கோடு
i.	$(1, 2)$	$3x + 4y = 8$
ii.	$(-1, -2)$	$2x - 5y = 7$
iii.	$(0, 3)$	$8x + y = 11$
iv.	$(-5, -1)$	$x + y = 7$
v.	$(2, 0)$	$8x - 4y = 7$
vi.	$(2a, 2b)$	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$

2. $(-3, 4)$, $(5, 1)$ என்ற புள்ளிகள் வழியே செல்லும் கோட்டிற்கு இணையாகவும், $(1, -2)$ என்ற புள்ளியைத் தன்மேல் கொண்ட கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்.

3. A $(-5, 2)$, B $(3, -4)$, C $(-1, -1)$ என்பவை ABC என்ற முக்கோணத்தின் முனைகள். AB என்ற பக்கத்தின் நடுப்புள்ளி வழியே BCக்கு இணையாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி. இது ACயின் நடுப்புள்ளி வழியே செல்லும் என்று காட்டு.

4. $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் நேர்கோடும், $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் நேர்கோடும் இணையெனில் குணகங்களின் தொடர்பைத் தரும் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

3.9 இரண்டு குத்துக் கோடுகள்: $ax + by + c = o$ என்ற சமன்பாடு தரும் கோட்டிற்குக் குத்தாக $(x_1\ y_1)$ வழியே செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு.

$ax + by + c = o$ என்ற கோட்டின் சரிவு $= \frac{-a}{b}$

∴ அதற்குக் குத்தாகவுள்ள கோட்டின் சரிவு $= \frac{b}{a}$

∴ $\frac{b}{a}$ என்ற சரிவுடன் $(x_1\ y_1)$ வழியே செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $bx - ay = bx_1 - ay_1$.

குறிப்பு: (i) x, y குணகங்களை மாற்றி, குறியை மாற்றினால் சமன்பாட்டின் இடப்பக்கம் கிடைக்கிறது.

(ii) அதில் (x, y)க்குப் புள்ளியின் உறுப்பு எண்களைப் பிரதியிட சமன்பாட்டின் வலப்பக்கம் கிடைக்கிறது.

இவ்வாறு குத்துக் கோட்டின் சமன்பாட்டை உடனே எழுத முடியும்.

மாதிரி: $(1, \frac{1}{2})$ என்ற புள்ளி வழியே $(4, 5)$, $(2, -8)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டிற்குக் குத்தாக உள்ள கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

A $(4, 5)$

B $(2, -8)$

∴ ABயின் சரிவு $= \frac{13}{2}$

∴ A B க்குக் குத்தாக உள்ள கோட்டின் சரிவு $= \frac{-2}{13}$

$\therefore$ ABக்குக் குத்தாக $(1, \frac{1}{2})$ வழியே செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $2x + 13y = 2 + 13 (\frac{1}{2})$

அதாவது $4x + 26y = 17$.

பயிற்சி 17

1. புள்ளியும், ஒரு கோடும் தரப்பட்டுள்ளன. அப்புள்ளி வழியே அக்கோட்டிற்குக் குத்தாக அமையும் கோட்டின் சமன் பாட்டை எழுதவும்.

	புள்ளி	கோட்டின் சமன்பாடு
i.	$(1, -2)$	$2x - 3y + 4 = 0$
ii.	$(3, 1)$	$4x + 3y - 5 = 0$
iii.	$(-1, 2)$	$5x - 7y + 8 = 0$
iv.	$(0, 1)$	$x + y + 1 = 0$
v.	$a \cos \alpha,\ b \sin \alpha)$	$\frac{x \cos \alpha}{a} + \frac{y \sin \alpha}{b} = 1$

2. $(3, 4), (-1, -2), (2, -3)$ என்ற முனைகளை யுடைய முக்கோணத்தின் குத்துயரங்களின் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

3. P $(-1, 0)$, Q $(2, -5)$, R $(0, 4)$ என்பவை PQR என்ற முக்கோணத்தின் முனைகள். அதன் குத்துயரங்களின் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

4. ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகள் முறையே $(3, -4)$, $(-3, -2)$, $(-5, 6)$. அதன் பக்கங்களின் நடுக் குத்துக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

5. $(-2, -3), (4, 5), (6, -7)$ என்ற முனைகளையுடைய முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுக் குத்துக் கோடுகளின் சமன் பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

3.10 இரண்டு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி: இரண்டு கோடு களின் சமன்பாடுகள் $ax + by + c = 0$; $a' x + b' y + c' = 0$ என்க.

$(x_1\ y_1)$ என்பது கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி எனில், அது இரண்டு சமன்பாடுகளுக்கும் அடங்கிய ஒரே எண் ஜோடியாக இருக்கவேண்டும். இரு சமன்பாடுகளை விடுவிக்க, வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி கிடைக்கும்.

மாதிரி: $x - 2y + 1 = 0$; $3x - 8y + 9 = 0$ என்ற கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியைக் கண்டுபிடி.

$$x - 2y + 1 = 0 \;\ldots\ldots (1)$$
$$3x - 8y + 9 = 0 \;\ldots\ldots (2)$$
$$(1) \times 3 \quad 3x - 6y + 3 = 0$$
$$\therefore - 2y + 6 = 0$$
$$\therefore \; y = 3 \qquad \therefore \; x = 5$$

$\therefore$ வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி (5, 3)

மாதிரி: $5x + y = 3$; $3x - y = 6$ என்ற சமன்பாடுகள் தரும் கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி யாது?

$$5x + y = 3 \;\ldots\ldots (1)$$
$$3x - y = 6 \;\ldots\ldots (2)$$
$$\therefore \; 8x = 9$$
$$\therefore \; x = 9/8.$$

xன் மதிப்பைப் பிரதியிட $5 \times \frac{9}{8} + y = 3$

$$45 + 8y = 24$$
$$8y = -21$$
$$\therefore \; y = \frac{-21}{8}$$

$\therefore$ வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி $\left(\frac{9}{8}, \frac{-21}{8}\right)$

மாதிரி: $ax + by + c = 0$; $a'x + b'y + c' = 0$ என்ற சமன்பாடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி எது?

$$ax + by + c = 0 \;\ldots\ldots (1)$$
$$a'x + b'y + c' = 0 \;\ldots\ldots (2)$$
$$(1) \times b' - (2)\, b: \quad x\,(ab' - a'b) + (cb' - c'b) = 0$$
$$\therefore \; x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}.$$

இதேபோல் $y = \dfrac{ca' - c'a}{ab' - a'b}$.

$$\therefore \; \frac{x}{bc' - b'c} = \frac{y}{ca' - c'a} = \frac{1}{ab' - a'b}.$$

குறிப்பு:

$bc' - b'c$ என்பதை $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$ என எழுதலாம்

$ca' - c'a$ என்பதை $\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}$ என எழுதலாம்

$ab' - a'b$ என்பதை $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ என எழுதலாம்

$ax + by + c = 0$; $a'x + b'y + c' = 0$ எனில்

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

என்று விடையை உடனே எழுதலாம்.

குறிப்பு: $(ab' - a'b) = 0$ என்றால் புள்ளி திட்டவட்டமாக வருவதில்லை. அதாவது இரண்டு கோடுகளும் இணைகோடுகளாகின்றன.

மாதிரி: $7x - 8y = 3$; $8x + 5y = 11$ என்ற சமன்பாடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியைக் கண்டுபிடி.

$$7x - 8y - 3 = 0$$
$$8x + 5y - 11 = 0$$

$$\therefore \frac{x}{\underbrace{\begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 5 & -11 \end{vmatrix}}_{88 + 15}} = \frac{y}{\underbrace{\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -11 & 8 \end{vmatrix}}_{-24 + 77}} = \frac{1}{\underbrace{\begin{vmatrix} 7 & -8 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}}_{35 + 64}}$$

$$\therefore \frac{x}{103} = \frac{y}{53} = \frac{1}{99}$$

$\therefore$ வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி $\left(\frac{103}{99}, \frac{53}{99}\right)$ ஆகும்.

பயிற்சி 18

கீழே தரப்பட்டுள்ள கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியைக் கண்டுபிடி.

(1) $3x + 5y = 11$
$3x - y = 5$

(2) $3x + 5y = 10$
$x - 5y + 10 = 0$

(3) $x + y = 12$
$2x = 3y - 1$

(4) $2x + 7y = 16$
$3x - y = 1$

(5) $4x + 3y = 7$
$x + y + 2 = 0$

(6) $25x + 23y = 73$
$23x + 25y = 71$

(7) $13x - 14y = 1$
$17x + 16y = -1$

(8) $4x - 3y = 2$
$5x - 6y = 1$

(9) $x + y + 2 = 0$
$3x - 2y + 1 = 0$

(10) $7x + 2y = 0$
$2x + 7y = 45$

3·11 **ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் (Concurrent Lines):** பொதுவாக மூன்று புள்ளிகள் வழியே ஒரு கோடு செல்லவேண்டும் என்ற அவசியம் இல்லை. ஆனால் அவ்வாறு மூன்றும் ஒரு புள்ளி வழியே சென்றால் அவை ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் எனப்படும். அதாவது இரண்டு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி மூன்றாவது கோட்டிலும் அமைகிறது.

மாதிரி: $2x - 3y = 7$; $3x - 4y = 13$, $8x - 11y = 33$ என்ற கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் என்று காட்டு.

$$2x - 3y = 7$$
$$8x - 11y = 33$$

என்ற சமன்பாடுகளை விடுவித்தால் $x = 11$; $y = 5$ ஆகும்.

∴ இக்கோடுகள் வெட்டும்புள்ளி $(11, 5)$ இது $3x - 4y = 13$ என்ற கோட்டில் அமைகிறது. ஏனெனில்

$$3(11) - 4(5) = 13$$

∴ மூன்று கோடுகளும் ஒரு புள்ளி வழியே செல்கின்றன.

மாதிரி: $ax + by + c = 0$; $a'x + b'y + c' = 0$, $a''x + b''y + c'' = 0$ என்பவை புள்ளி வழியே செல்லும் கோடுகளானால், குணகங்களின் தொடர்பைத் தரும் சமன் பாட்டைக் காண்க.

$$\left.\begin{array}{l} a'x + b'y + c' = 0 \\ a''x + b''y + c'' = 0. \end{array}\right\}$$ என்ற கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியைக் காண்போம்.

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} c' & a' \\ c'' & c'' \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}}$$

$$\therefore \frac{x}{b'c'' - b''c'} = \frac{y}{c'a'' - c''a'} = \frac{1}{a'b'' - a''b'}$$

$\therefore$ வெட்டும் புள்ளி $\left(\dfrac{b'c'' - b''c'}{a'b'' - a''b'}, \quad \dfrac{c'a'' - c''a'}{a'b'' - a''b'}\right)$

இது முதல் கோட்டில் அமைந்தால்

$$\frac{a\,(b'c'' - b''c')}{(a'b'' - a''b')} + \frac{b\,(c'a'' - c''a')}{(a'b'' - a''b')} + c = 0$$

$\therefore$ குணகங்களின் தொடர்பு

$$a\,(b'c'' - b''c') + b\,(c'a'' - c''a') + c\,(a'b'' - a''b') = 0$$

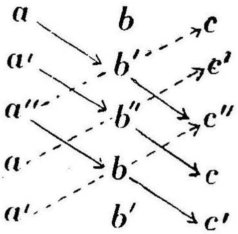
குறிப்பு: குணகங்களைக் கீழ்க்கண்ட முறையில் எழுதி எளிதாகத் தொடர்பை எழுதலாம்.

I

$a''b'c$

$a\,b''c'$

$a'b\,c''$



II

$a\,b'\,c''$

$a'\,b''c$

$a''b\,c'$

I − II = 0 என்பது தான் தொடர்பு

பயிற்சி 19

1. கீழே தரப்பட்டுள்ளவை ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள் என்று காட்டு.

(i) $4x + 3y = 13$; $7x - 2y = 1$; $x - 5y = -14$

(ii) $3x - 2y = 4$ $4x + 5y = 14$ $5x + 2y = 9$

(iii) $7x + 4y = 1$; $3y - 2x = 8$; $5y = 4 - 6x$

(iv) $4x + 6y = 5$; $2x - 9y + 2 = 0$; $6x - 6y = 1$

(v) $2x - 3y + 12 = 0$; $2x - y + 8 = 0$; $4x + 5y + 2 = 0$

(vi) $3x + 4y = 13$; $2x - 7y + 1 = 0$; $5x - y - 14 = 0$

2. கீழே தரப்பட்டுள்ளவை ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் எனில் a ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

(i) $3x+y-2=0$; $ax+2y-3=0$; $2x-y-3=0$.

(ii) $x-6y+a=0$; $2x+3y+4=0$; $x+4y+1=0$.

(iii) $x+3y+2=0$; $x-2y-3=0$; $ax+y-3=0$.

3. $4x+9y=5$; $2x-9y+2=0$; $ax+by=1$ என்பவை ஒருபுள்ளிவழிச் செல்லும் கோடுகள் எனில் $3x+2y=6$ என்ற கோடு (a, b) என்ற புள்ளிவழியே செல்லும் என்று காட்டு.

பலவகைக் கணக்குகள்

மாதிரி: $7x-y-3=0$; $x+y-5=0$ என்ற கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழியாக (i) $3x-4y+8=0$ என்ற கோட்டிற்குக் குத்தாக இருக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன? (ii) $(4, 3)$, $(-1, -2)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டிற்கு இணையாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

வெட்டும் புள்ளியைக் காண,

$$7x-y-3=0$$

$$x+y-5=0$$

$$\therefore\ 8x-8=0$$

$$\therefore\ x=1;\ y=4$$

$\therefore$ வெட்டும்புள்ளி $(1, 4)$.

(i) $3x-4y+8=0$ என்பதன் சரிவு $= \frac{3}{4}$

$\therefore$ அதற்குக் குத்தாக உள்ள கோட்டின் சரிவு $= -\frac{4}{3}$

$\therefore$ $(1, 4)$ என்ற புள்ளி வழியே $\frac{-4}{3}$ என்ற சரிவுடன் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $4x+3y=4+12$ அதாவது $4x+3y=16$.

(ii) (4, 3), (−1, −2) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும்

கோட்டின் சரிவு $= \frac{5}{5} = \frac{1}{1}$.

∴ இணைகோட்டின் சரிவு $= \frac{1}{1}$

∴ (1, 4) வழியே $\frac{1}{1}$ என்ற சரிவுடன் செல்லும்

கோட்டின் சமன்பாடு $x - y = 1 - 4$

அதாவது $x - y + 3 = 0$.

மாதிரி: ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகள் (−4, 2), (2, 6), (6, −4). அதன் குத்துமையத்தைக் (orthocentre) கண்டுபிடி.

A (− 4, 2), B (2, 6), C (6, − 4) என்பவை முனைகள்.

∴ AD ⊥ BC ; CF ⊥ AB ;

AD யும், CF ம் வெட்டும்புள்ளி குத்துமையம். ஆகவே இவற்றின் சமன்பாடுகளைக் கண்டு விடுவிக்க வேண்டும்.

A (− 4, 2)

AB யின் சரிவு $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ∴ CF ன் சரிவு $= \frac{-3}{2}$

B (2, 6)

சரிவு BC $= \frac{10}{-4} = \frac{-5}{2}$ ∴ சரிவு AD $= \frac{2}{5}$.

C (6, − 4)

∴ AD யின் சமன்பாடு $2x - 5y = -8 - 10$

i.e. $2x - 5y = -18$

∴ CF ன் சமன்பாடு $3x + 2y = 18 - 8$

i.e., $3x + 2y = 10$

$3x + 2y - 10 = 0$

$2x - 5y + 18 = 0$

$$\therefore \frac{x}{\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ -5 & +18 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} -10 & 3 \\ +18 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}}$$

$(36 - 50)$ $\quad (-20 - 54)$ $\quad (-15 - 4)$

$\therefore \frac{x}{-14} = \frac{y}{-74} = \frac{1}{-19}$ ∴ குத்துமையம் $\frac{14}{19}, \frac{74}{19}$ ஆகும்.

பயிற்சி 20

1. $2x + y = -5$; $x = y + 5$ என்ற நேர்கோடுகளின் சந்திப்பு வழியாக $2x - 3y = 8$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான கோட்டையும், $5x + 3y = 17$ என்ற கோட்டிற்குக் குத்தாக உள்ள கோட்டையும் கண்டுபிடி.

2. $3x - y + 2 = 0$ என்ற கோட்டிற்குக் குத்தாகவும் $2x - y + 5 = 0$; $x + y + 1 = 0$ என்ற கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழியாகவும் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

3. $x + 2y + 5 = 0$; $y = x + 7$ என்ற கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிவழியே $5x - 2y + 1 = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாகவும் $2x - y + 5 = 0$ என்ற கோட்டிற்குக் குத்தாகவும் உள்ள கோட்டைக் கண்டுபிடி.

4. $3x + 4y = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாகவும், $x + 3y = 1$; $x - 2y + 4 = 0$ என்பவை வெட்டும் புள்ளிவழியாகவும் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

5. $x + 2y = 7$; $4x - y = 1$ என்ற கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியை $(-2, 3)$ என்ற புள்ளியுடன் இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

6. $(5, -2)$ என்ற புள்ளியை, $2x - y + 5 = 0$; $x + y + 1 = 0$ என்பவை வெட்டும் புள்ளியுடன் இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

7. $7x - 13y = 2$; $13x - 7y = -2$ என்ற கோடுகளுக்குப் பொதுவான புள்ளியை மூலப்புள்ளியுடன் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

8. ஒரு நாற்கரத்தின் பக்கங்கள் முறையே $3x + 2y + 1 = 0$; $y - x = 1$; $x + y = 3$; $y - 2x + 2 = 0$ மூலை விட்டங்களின் சமன் பாடுகளைக் காண்க.

9. ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகள் $(1, -2)$, $(3, 1)$ $(-2, 3)$. அதன் குத்து மையத்தைக் கண்டுபிடி.

10. $(0, -1)$, $(18, 8)$, $(0, 12)$ என்ற முனைகளையுடைய முக்கோணத்தின் குத்துமையத்தைக் கண்டுபிடி.

11. $(2, 0)$, $(-2, 2)$, $(0, -4)$ என்ற முனைகளையுடைய முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம் (circum centre) என்ன? ஆரம் என்ன?

12. ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகள் முறையே $(0, 0)$ $(6, 0)$ $(0, 8)$. அதன் சுற்றுவட்ட மையத்தையும், சுற்றுவட்டத்தின் ஆரத்தையும் கண்டுபிடி.

13. $(4, 3)$, $(-6, 3)$, $(2, -1)$ என்ற முனைகளையுடைய முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையத்தையும், சுற்றுவட்டத்தின் ஆரத்தையும் கண்டுபிடி.

14. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் $2x - y + 3 = 0$; $3x + 2y = 10$; $x + y - 1 = 0$. முக்கோணத்தின் பரப்பு என்ன?

15. $2x+y-5=0$; $x+2y-7=0$; $x-y-1=0$ என்பவை ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் எனில் முக்கோணத்தின் பரப்பைக் கணக்கிடு.

சோதனைத் தாள் — பகுதி 2

1

1. $(-1, 4)$ என்ற புள்ளி வழியே $3x + 4y + 28 = 0$ என்ற கோட்டிற்குக் குத்தாகவுள்ள கோட்டின் சமன்பாடு என்ன?

2. $3x-4y+5=0$; $7x-8y+5=0$; $4x+5y=45$ என்ற கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள் எனக்காட்டு.

3. x அச்சுடன் $-60°$ கோணத்தில் y அச்சில் 4 அலகு நீளமுள்ள துண்டை வெட்டும் நேர் கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுது.

4. $(3, 2)$, $(-1, -1)$, $(5, -5)$ என்ற முனைகளையுடைய முக்கோணத்தின் குத்துமையத்தைக் காண்க.

2

1. A $(-3, 4)$ என்ற புள்ளி வழியே 3, $\frac{1}{3}$ என்ற சரிவுகளையுடைய இரண்டு நேர்கோடுகளின் சமன்பாட்டை எழுது. அவை X அச்சை B, C என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால், முக்கோணம் ABCயின் பரப்பு என்ன?

2. $3x - 4y = 18$; $4x - 3y = 17$ என்ற நேர்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $x^2 + y^2 = 13$ என்ற வரையில் அமைகிறது எனக்காட்டு.

3 (2, 1) (3, 1), (5, 0) என்ற முனைகளையுடைய முக்கோணத்தின் இடைக்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

4. (3, 2), (−2, 3) என்ற புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்தில் $3y - 4x + 11 = 0$ என்ற நேர்கோட்டில் அமையும் புள்ளியைக் காண்க.

3

1. முறையே (−1, 2), (4, 1), (7, 16) என்ற புள்ளிகளை முனைகளாக உடைய இணைகரத்தின் நான்காவது முனையைக் கண்டுபிடி. அதன் மூலை விட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காணவும்.

2. A (0, 5), B (− 4, 1), C (5, 2) என்பவை மூன்று புள்ளிகள். A வழியாக BCக்கு இணையாகவும், குத்தாகவும் உள்ள நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

3. $ax+y=5$; $x+5y-3=0$; $5x-2y=12$ என்பவை ஒரு புள்ளி வழிக் கோடானால் aன் மதிப்பு என்ன?

4. $a_1 x+b_1 y+c_1=0$; $a_2 x+b_2 y+c_2=0$, $a_3 x+b_3 y+c_3=0$ என்பவை ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள். கடைசி இரு பக்கங்களும் Aயில் வெட்டுகின்றன. A வழியே செல்லும் குத்துக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

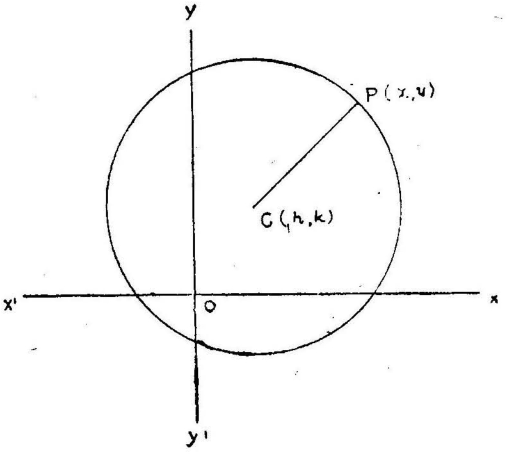
4 வட்டம்
(Circle)

ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து சமதூரத்தில் அமையும் புள்ளிகள் கொண்ட புள்ளித் தொகுதி வட்டமாகும்.

குறிப்பிட்ட புள்ளிக்கு, வட்டத்தின் மையம் என்பது பெயர். மையத்திலிருந்து புள்ளிகளின் தூரம் ஆரம் எனப்படும்.

4·1 **C (h, k) என்ற புள்ளியை மையமாகவும் r அலகு ஆரமும் உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு :**

P (x, y) என்பது வட்டத்தில் ஒரு புள்ளி ஆகுக. C (h, k) அதன் மையம்.



$$\therefore CP = r$$

$$\therefore CP^2 = r^2$$

$$\therefore (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

இதுவே வட்டத்தின் சமன்பாடு.

குறிப்பு : வட்ட மையம் (O, O), [அதாவது மூலப்புள்ளி, ஆரம் a அலகு எனில் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 = a^2$$

பயிற்சி 21

1. வட்டமையமும், ஆரமும் தரப்பட்டுள்ளன. சமன்பாட்டை எழுது.

	மையம்	ஆரம்		மையம்	ஆரம்
(*i*)	(3, 4)	10	(*v*)	(0, 0)	7
(*ii*)	(3, − 2)	5	(*vi*)	(−5, 2)	7
(*iii*)	(−3, −4)	5	(*vii*)	(0, − 8)	3
(*iv*)	(0, a)	a	(*viii*)	$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$	4

(*ix*) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right)$; 6

2. $2x + y = 5$; $3x - y = 5$ என்பவை ஒரு வட்டத்தின் இரு விட்டங்கள். வட்டம் $(1, -1)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்வதால் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

[**குறிப்பு :** வெட்டும் புள்ளி மையமாகும். ஆரத்தைக் கணக்கிடு].

3. $3x + y = 2$; $5x - 3y = 1$ என்பவை ஒரு வட்டத்தின் விட்டங்கள். வட்டம் $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்கிறது. வட்டத்தின் சபன்பாடு என்ன?

4. X அச்சு, Y அச்சுக்களைத் தொட்டுக்கொண்டும், முதற் பிரிவில் அமைவதாயும் இருந்தால் 4 அலகு ஆரமுமுள்ள வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

5. $(-1, -2)$ என்ற புள்ளியை மையமாகவும், $3x - y = 2$; $9x + y = 7$ என்ற கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழியாகவும் செல்லக்கூடிய வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

4.2 வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாடு: $ax + by + c = o$ என்பது பொதுவாக ஒரு நேர்கோடு என்றும், அதன் சரிவு $-\frac{a}{b}$ என்றும் முன்னர் கூறினோம். அதைப்போல் வட்டத்தின் பொதுச் சமன்பாட்டைக் கண்டுணர்வோம்.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = o$ என்பது வட்டத்தின் சமன்பாடு. அதன் மையம் $(-g, -f)$. ஆரம் $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

P $(x_1\ y_1)$ என்பது சமன்பாடு தரும் வரையில் ஒரு புள்ளி ஆகுக.

$$\therefore \quad (x_1^2 + y_1^2) + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$$

$$(x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 = g^2 + f^2 - c$$

$$\therefore \quad \sqrt{(x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2} = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

ஆனால் சமன்பாட்டின் இடது பக்கத்துக் கோவை P $(x_1\ y_1)$ என்ற புள்ளிக்கும், C $(-g, -f)$ என்ற புள்ளிக்கும் இடையிலுள்ள தூரத்தைத் தருகிறது.

$$\therefore \quad CP = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

$\therefore$ P என்ற புள்ளி வரையில் எங்கு இருப்பினும் C $(-g, -f)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து ஒரே தூரத்தில் இருக்கிறது. ஆகவே வரை வட்டமாகும். அதன் மையம் $(-g, -f)$ ஆரம் $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$

குறிப்பு: ஆகவே $(-g, -f)$ என்ற புள்ளியை மையமாக உடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = K$ ஆகும். Kக்கு பல்வேறு மதிப்புக்கள் கொடுக்க $(-g, -f)$ என்ற ஒரே புள்ளியை மையமாக உடைய 'பொதுமைய வட்டங்களின்' (concentric circles) சமன்பாடுகள் கிடைக்கும். ஆனால் $g^2 + f^2 - c = o$ என்றால் ஆரம் o ஆகிறது. வட்டம் புள்ளி வட்டமாகிறது. அதாவது $(-g, -f)$ என்ற புள்ளியையே வட்டமாகக் கருதவேண்டும். $g^2 + f^2 - c$ எதிரெண்ணானால் $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ பொய் எண்ணாகிறது. வட்டம் பொய் என்கிறோம்.

குறிப்பு 2. $(-g, -f)$ என்ற புள்ளியை மையமாகவும் $(x_1\ y_1)$ என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2+2gx+2fy = x_1^2+y_1^2+2gx_1+2gx_1+2fy_1$ ஏனெனில் $x^2+y^2+2gx+2fy = K$ என்க. $(x_1\ y_1)$ என்ற புள்ளி இதில் அமைவதால் $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1 = K$.

$\therefore\ x^2+y^2+2gx+2fy = x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1$ என்பது வட்டத்தின் சமன்பாடு.

மாதிரி: $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ என்ற புள்ளியை மையமாகவும் $(3, -6)$ என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டை எழுது.

$$x^2+y^2+\tfrac{2}{3}x-\tfrac{4}{3}y = 3^2+(-6)^2+\tfrac{2}{3}(3)-\tfrac{4}{3}(-6)$$
$$= 9+36+2+8$$
$$= 55$$

$\therefore$ சமன்பாடு $3x^2+3y^2+2x-4y=165$

மாதிரி: $x^2+y^2-6x+4y-8=0$ என்ற வட்டத்துடன் பொது மையமாக $(1, -1)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

[பொது மைய வட்டங்களின் சமன்பாடுகளில் x, y வரும் ராசிகள் ஒன்றாக இருக்கின்றன].

பொது மைய வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-6x+4y=K$
$(1, -1)$ இதில் அமைகிறது.

$\therefore\ 1+1-6-4 = K$

$\therefore\ -8 = K$

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-6x+4y=-8$

$\therefore\ x^2+y^2-6x+4y+8=0$

மாதிரி: $(2, -3), (4, +5)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு வட்டத்தின் விட்டத்தின் முனைகள். வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

A $(2, -3)$; B $(4, +5)$ என்பது விட்டம்.

$\therefore$ மையம் $(3, 1)$

∴ (3, 1)ஐ மையமாகவும் (2,−3)ன் வழியாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2-6x-2y = 2^2+(-3)^2-6x^2-2x-3$$
$$= 4+9-12+6$$
$$= 7$$

∴ $x^2+y^2-6x-2y-7=0$ என்பதுதான் தேவையான சமன்பாடு.

பயிற்சி 21

(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகள் குறிக்கும் வட்டங்களின் மையங்களையும் ஆரங்களையும் எழுது.

(i) $x^2+y^2+6x+8y+21=0$

(ii) $x^2+y^2-10x+4y-7=0$

(iii) $x^2+y^2=-5x+7y-2$

(iv) $4x^2+4y^2-24x+20y-3=0$

(v) $4x^2+4y^2=20x+12y-9$

(vi) $16x^2+16y^2+16y-24x=87$

(2) வட்டத்தின் மையமும், வட்டப்பரிதியிலுள்ள புள்ளியும் தரப்பட்டுள்ளது. வட்டத்தின் சமன்பாட்டை எழுது.

மையம் : $(4,2)$; $(-3,4)$ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, (a, a), $(3,-4)$

புள்ளி : $(1,-1)$; $(0,-2)$, $(5,-6)$, $(0,a)$, $(0,0)$

(3) ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2-x+y=8$. இத்துடன் பொது மையமுடையதாய் $(1,-1)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

(4) $x^2+y^2+3x-4y+7=0$ என்ற வட்டத்துடன் பொது மையமுடையதாய் $(-1, 2)$ என்ற புள்ளி வழியே செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

(5) $3x-y=5$; $2x+3y=7$ என்பவை ஒருவட்டத்தின் விட்டங்கள். அது $(1, 1)$ வழியே செல்வதாயின் வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

(6) $2x - 3y = 7$; $5x + 4y = 6$ என்பவைகளை விட்டங்களாகக் கொண்டு $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ என்ற வட்டத்துடன் பொது மையமாக உடைய வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காணவும்.

(7) (4, 1), (−2, −5) என்பவைகளை விட்டமுனைகளாகவுடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

(8) A (−2, 5), B (2, −5) என்பதை விட்டமாகக்கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

(9) (−1, −2), (4, −1) என்பவை ஒரு விட்டத்தின் இரு முனைகள். அவ்வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

மாதிரி: (1, 0) (1, 2), (−3, 4) என்ற புள்ளிகள் வழியே செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி. அதன் மையம் என்ன? ஆரம் என்ன?

சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்க.

(1, 0) அதில் இருப்பதால் $1 + 2g + c = 0$ ...... (1)

(1, 2) அதில் இருப்பதால் $5 + 2g + 4f + c = 0$ ...... (2)

(−3, 4) அதில் இருப்பதால் $25 - 6g + 8f + c = 0$ ... (3)

(2) −(1) $\quad 4 + 4f = 0 \quad \therefore f = -1$

(3) −(2) $\quad 20 - 8g + 4f = 0$

$\therefore 8g = 16 \quad \therefore g = 2$

(1) லிருந்து $c = -5$

$\therefore g = 2;\ f = -1;\ c = -5.$

$\therefore$ சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$
மையம் (−2, 1)
ஆரம் $= \sqrt{4 + 1 + 5} = \sqrt{10}$

குறிப்பு: மூன்று சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடித்து g, f, c என்பனவற்றின் மதிப்பைக் கண்டுபிடித்தால் மூன்று புள்ளிகள் வழியே செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

மாதிரி: ஒரு வட்டம் (8, −8), (−10, 4) என்ற புள்ளிகள் வழியே செல்கிறது. அதன் மையம் $2y = x + 5$ என்ற கோட்டில் அமைந்தால் வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$(8, -8)$ அதில் இருப்பதால் $64 + 64 + 16g - 16f + c = 0$.

$\therefore \quad 16g - 16f + c = 128 \ldots \ldots \qquad (1)$

இதேபோல் $(-10, 4)$ அதில் இருப்பதால்

$-20g + 8f + c = -116 \ldots \ldots \qquad (2)$

வட்டமையம் $(-g, -f)$ என்பது $2y = x + 5$ என்ற கோட்டில் அமைவதால் $-g + 2f = -5 \ldots \ldots \qquad (3)$

$(1) - (2) \qquad 36g - 24f = -12$

$\therefore \quad 3g - 2f = -1 \qquad (4)$

$(3) + (4) \qquad 2g = -6$

$\therefore \quad g = -3$

$\therefore \quad f = -4; \quad c = -144$

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y - 144 = 0$$

பயிற்சி 22

(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று புள்ளிகளின் வழியே செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(i) $(0, 0), (6, 0), (0, 8)$ (ii) $(2, 3), (2, -7), (3, 0)$

(ii) $(5, 4), (-5, 4), (3, 0)$ (iv) $(0, 1), (2, 3), (-2, 5)$

(v) $(1, 0), (3, 2), (5, 2)$ (vi) $(2, 0), (4, 2), (6, -2)$

(vii) $(10, 6) (-4, 4), (4 \cdot 8)$.

(2) $(1, -3)$, $(1, 3)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகவும், $3x - 4y = 12$ என்ற கோட்டினை விட்டமாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

(3) $2x + y = 0$ என்ற கோட்டில் மையத்தையுடையதாகவும் $(3, 4)$, $(-3, -4)$ என்ற புள்ளிகள் வழியாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

(4) $(1, 0), (3, 4)$ என்ற புள்ளிகள் வழியே செல்வதாயும், $5x = 4y - 5$ என்ற கோட்டில் மையத்தையுடையதாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

(5) X, Y அச்சுக்களில் முறையே 8, 6 அலகுகள் தூரமுள்ள துண்டுகளை வெட்டும்படியும், மூலப்புள்ளி வழியாக செல்லும் படியும் அமைவதான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

(6) (3, 4), (0, 5), (−3, 4), (−5, 0) என்ற புள்ளிகள் ஒரு வட்டப்பரிதியில் அமையும் என்று காட்டு. அவ்வட்டத்தின் மையமென்ன? ஆரத்தின் நீளமென்ன? (M.U.)

(7) (2, 1), (1, 2), (8, 9) என்ற புள்ளிகள் வழியே செல்லும் வட்டத்தின் மையத்தையும், ஆரத்தையும் கண்டுபிடி.

(8) (1, 2), (−2, −4), (−1, 3), (2, 0) என்பவை ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் முனைகள் என்று காட்டு. அதன் ஆரத்தையும், மையத்தையும் கணக்கிடு.

பலவகைக் கணக்குகள்

வட்டத்தைப் பற்றிய கணக்குகளில் ஜியோமிதியில் அறிந்த சில உண்மைகளைப் பயன்படுத்த வேண்டி வரும். உதாரணமாக (*i*) ஆரம் அல்லது விட்டம் என்பது வட்டமையத்தின் வழியே செல்லும் கோடாகும். (*ii*) வட்டத்திற்கு அதன் பரிதியிலுள்ள புள்ளி வழியே வரையப்படும் தொடுகோடு, தொடுபுள்ளி வழியே வரையப்படும் ஆரத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்கும். இம்மாதிரி உண்மைகளைப் பயன்படுத்திச் சில கணக்குகளைப் போடுவோம்.

மாதிரி: $x^2 + y^2 - 5x - 3y = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு மூலப் புள்ளி வழியே செல்லும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

மூலப்புள்ளி $(0, 0)$ வட்டத்தில் அமைவதைக் காணலாம்.

வட்டமையம் $C\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$\therefore$ சரிவு $OC = \frac{3}{5}$.

தொடுகோடு $\perp OC$. $\therefore$ தொடுகோட்டின் சரிவு $= \frac{-5}{3}$.

$\therefore$ மூலப்புள்ளி வழியே செல்லும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $5x + 3y = 0$ ஆகும்.

பயிற்சி 23

1. புள்ளியும், வட்டத்தின் சமன்பாடும் தரப்பட்டுள்ளது. புள்ளி அவ்வட்டத்தில் அமைகிறது என்று காட்டு. அப்புள்ளி வழியே அவ்வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடு கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

i. $(-6, 5)$; $x^2+y^2-2x-10y+1=0$

ii. $(4, 1)$; $x^2+y^2-3x-7y+2=0$

iii. $(-3, -2)$; $x^2+y^2-5x+9y-10=0$

iv. $(-9, -7)$; $x^2+y^2+12x+2y-8=0$

v. $(8, -8)$; $x^2+y^2-10x+8y+16=0$

vi. $(0, 0)$; $x^2+y^2+2gx+2fy=0$

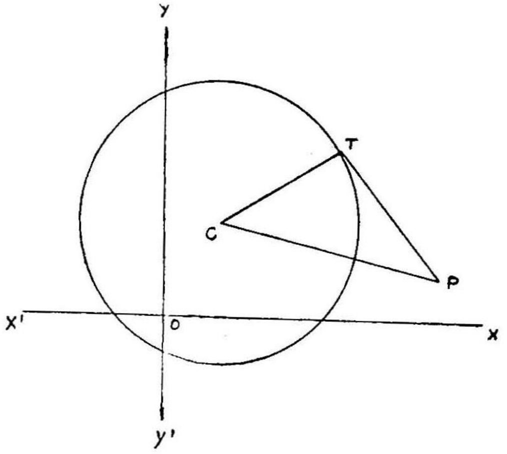
2. A $(4, 1)$ என்ற புள்ளி $x^2+y^2-3x-7y+2=0$ என்ற வட்டத்தில் அமையும் என்று காட்டு. AB என்பது விட்டமானால் Bயைக் கண்டுபிடி. B வழியே வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு என்ன? [C $(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ என்ற வட்டமையம் ABயின் நடுப்புள்ளி என்பதைப் பயன்படுத்தி Bயைக் கண்டுபிடி.]

3. $(-3, -2)$ என்ற புள்ளி $x^2+y^2-5x+9y+10=0$ என்ற வட்டத்தில் அமைகிறது என்று காட்டு. அப்புள்ளி வழியே செல்லும் விட்டத்தின் மறு முனையையும், அம்முனை வழியே வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டையும் கண்டுபிடி.

4. $(3, -2)$ என்பது $x^2+y^2-8x+2y+15=0$ என்ற வட்டப் பரிதியில் உள்ள புள்ளி என்று காட்டு. அதன் வழியே செல்லும் விட்டத்தின் மறுமுனையையும், அம்முனை வழியே வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடு கோட்டின் சமன்பாட்டையும் கண்டுபிடி.

4.3 புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடு கோட்டின் நீளம்.

தொடுகோடும், தொடுபுள்ளி வழியே வரையப்பட்ட ஆரமும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என்பதைப் பயன்படுத்தி தொடு கோட்டின் நீளத்தைக் கணக்கிடலாம்.



P $(x_1\ y_1)$ என்பது ஒரு புள்ளி.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = o$ என்பது வட்டம்.

PT வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடு.

வட்டமையம் C என்பது $(-g, -f)$ என்ற புள்ளி.

$\therefore$ CT $\perp$ PT ; $\therefore$ ஆரம் CT $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$\therefore$ $\angle PTC = 90$; $PT^2 = PC^2 - CT^2$ (படம் பார்க்கவும்) ஆனால் P $(x_1\ y_1)$, $(-g, -f)$ என்ற இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் $= \sqrt{(x_1+g)^2 + (y_1+f)^2}$

$$\therefore\ PT^2 = (x_1+g)^2 + (y_1+f)^2 - (g^2+f^2-c)$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2f_1 + c$$

$\therefore$ தொடுகோட்டின் நீளம் $= \sqrt{x_1^4 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$

குறிப்பு: (1) நீளத்தின் வர்க்கம் நேரெண்ணாக வரின் புள்ளி வட்டத்திற்கு வெளியே அமையும். ஏனெனில் $PC^2 - CT^2 > 0$.

(2) எதிரெண்ணாக வந்தால் புள்ளி வட்டத்தினுள் அமையும்

(3) 0 ஆக வந்தால் புள்ளி வட்டப்பரிதியில் அமையும்.

பயிற்சி 24

1. $(-1, -2)$ என்ற புள்ளி $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வெளியே அமைகிறது என்று காட்டு. அப்புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளத்தைக் கணக்கிடு.

2. $x^2+y^2=16$ என்ற வட்டத்திற்கு $(-2, 1)$, $(4, 3)$, $(3, 2)$ என்ற புள்ளிகளில் எவை வெளியே அமைபவை? எவை உள்ளே அமைபவை?

3. $(0, 0)$, $(3, 4)$, $(-1, -1)$, $(4-2)$ என்ற புள்ளிகளில் எவையெவை வட்டத்தினுள் அமையும்? அவற்றிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்களைக் கணக்கிடு.

4. $x^2+y^2-6x-8y=0$, $x^2+y^2+6x+8y+16=0$ என்ற இரு வட்டங்களுக்கும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமமானால் அப்புள்ளி $3x+4y=0$ என்ற கோட்டில் அமையும் என்று காட்டு.

3.4 **தொடுவட்டங்கள் :** இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று வெளியில் தொட்டுக்கொண்டால், அவைகளின் மையங்களுக்கிடையே உள்ள தூரம், அவைகளின் ஆரங்களின் கூடுதல் ஆகும்.

இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று உள்ளே தொட்டுக்கொண்டால், அவைகளின் மையங்களுக்கிடையே உள்ள தூரம், ஆரங்களின் வித்தியாசம் ஆகும்.

வெளித் தொர்டுவட்டங்களின் தொடு புள்ளி மையங்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை உள்ளே ஆரங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

வெளித்தொடு வட்டங்களில் தொடு புள்ளி, மையங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தை புறம்பாக ஆரங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

இவ்வுண்மைகளைப் பயன்படுத்திச் சில கணக்குகளைச் செய்வோம்.

மாதிரி: $x^2+y^2-4x-6y-12=0$, $x^2+y^2+6x+18y+26=0$ என்ற வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன எனக் காட்டு. தொடு புள்ளியைக் கணக்கிடு.

முதல் வட்டத்தின் மையம் $A = (2, 3)$

$\therefore$ அதன் ஆரம் $a = \sqrt{4+9+12} = 5$

இரண்டாவது வட்டத்தின் மையம் $B = (-3, -9)$

$\therefore$ அதன் ஆரம் $b = \sqrt{9^2 + 81 - 26} = 8$

$\therefore$ $AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 = a + b$

$\therefore$ வட்டங்கள் வெளித் தொடுவட்டங்கள்.

$P(x_P, y_P)$ என்ற தொடுபுள்ளி ABயை 5:8 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

A (2, 3) ; B (−3, −9)

விகிதம் 5:8

$$\therefore \quad x_P = \frac{-15 + 16}{13} = \frac{1}{13}$$

$$y_P = \frac{-45 + 24}{13} = \frac{-21}{13}$$

$\therefore$ $P\left(\frac{1}{13}, \frac{-21}{13}\right)$ என்பது தொடுபுள்ளி

பயிற்சி 25

(1) $x^2+y^2 = 4$ என்ற வட்டமும் $x^2+y^2 - 8x - 6y+16=0$ என்ற வட்டமும் தொடுவட்டங்கள் என்று காட்டு. தொடுபுள்ளியைக் கண்டுபிடி.

(2) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ என்ற வட்டமும், $x^2 + y^2 - 8x - 8y - 17 = 0$ என்ற வட்டமும் தொடுவட்டங்கள் எனக் காட்டு. தொடுபுள்ளியைக் கண்டுபிடி.

(3) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 12 = 0$; $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$ என்பவை தொடுவட்டங்கள் என்று காட்டு. தொடுபுள்ளியைக் கண்டுபிடி.

3·4 **வட்டமும் நேர்கோடும்.** வட்டத்திற்கும், நேர்கோட்டிற்கும் பொதுவான புள்ளிகளின் உறுப்புக்கள் இரண்டு சமன்பாடுகளுக்கும் பொதுவானதாக இருக்கும். அந்த உறுப்புக்களைக் கண்டுபிடித்தால், நேர்கோடானது வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளியைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

மாதிரி : $x + y = 1$; என்ற நேர்கோடு $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 15 = 0$ என்ற வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடி.

சமன்பாடுகள் $x + y = 1$ ... ... (1)

$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 15 = 0$ ...... (2)

(1)லிருந்து $y = 1 - x$;. (2) இல் இதைப் பிரதியி.

$$x^2 + (1-x)^2 - 8x + 2(1-x) + 15 = 0$$

$$2x^2 - 12x + 18 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\therefore \quad (x-3)^2 = 0$$

$$\therefore \quad x = 3, 3 \qquad \therefore \quad y = -2, -23$$

புள்ளிகள் இரண்டும் $(3, -2)$, $(3, -2)$ என வருவதால் வெட்டும் புள்ளிகள் இரண்டும் ஒன்றேயாகும். அதாவது நேர்கோடு வட்டத்தின் தொடுகோடாகும்.

பயிற்சி 26

(1) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வட்டங்களும், நேர்கோடுகளும் வெட்டும் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடி.

(i) $x^2 + y^2 - 3x - 5y + 6 = 0$; $x - 2y + 1 = 0$

(ii) $x^2 + y^2 + 16x + 4y + 18 = 0$; $4x - 3y + 1 = 0$

(iii) $x^2 + y^2 - 3y - 7 = 0$; $x + 6y = 9$

(2) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு நேர்கோடும், அவற்றிற்கு எதிரில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வட்டத்தைத் தொடும் என்று காட்டு. தொடுபுள்ளியையும் கண்டுபிடி.

(i) $y = 2x$; $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$

(ii) $x + y = 1$; $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 15 = 0$

(iii) $2x + y = 7$; $x^2 + y^2 + 2x + 12y - 8 = 0$

சோதனைத்தாள்

பகுதி 3

[சென்னைப் பல்கலைக் கழக வினாத்தாள்களிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை]

1

(1) ஒரு வட்டம் $(-7, 1)$ என்ற புள்ளியை மையமாகவும், $(-4, -3)$ என்ற புள்ளி வழியாகவும் சென்றால் அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன? [M.U. 57 A]

(2) $(x-3)^2+(y-4)^2=25$ என்பது ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு என்று எப்படி நிரூபிப்பாய்? அவ்வட்டம் மூலப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் என்று காட்டு. மூலப்புள்ளி வழியே செல்லும் விட்டத்தின் மறு முனையைக் கண்டுபிடி.

[M.U. 57 S]

(3) $(8, 7)$ என்ற புள்ளி $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$ என்ற வட்டத்தில் அமையும் என்று காட்டு. அப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் விட்டத்தின் சமன்பாட்டையும், தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டையும் கண்டுபிடி.

[M.U. 57 A]

(4) $(1, 2), (-2, -4), (-1, 3), (2, 0)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு வட்டப்பரிதியில் அமையும் என்று நிரூபி. அவ்வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும், ஆரத்தையும் கண்டுபிடி.

[M.U. 58 A]

2

(1) $(3, -2)$ என்ற புள்ளியை மையமாகவும், 3 அலகு நீளம் ஆரமுள்ள வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி.

[58 A]

(2) $(4, 1), (-2, -7)$ என்ற புள்ளிகளை விட்ட முனைகளாக வுடைய வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[58 S]

(3) $x^2 + y^2 + 3x + 7y + 2 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மையமென்ன? ஆரமென்ன? $x + y + 5 = 0$ என்பது அவ்வட்டத்தின் விட்டம் என்று காட்டு. [58 S]

(4) மையப் புள்ளி, $(6, 0), (0, 8)$ என்ற புள்ளிகள் வழியே செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி. மூலப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் விட்டம், தொடுகோடு — இவைகளின் சமன்பாடுகளையும் கண்டுபிடி.

(5) $(1, 4)$ என்ற புள்ளி $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$ என்ற வட்டத்தில் அமைகிறது என்று காட்டு. அதன் வழியாகச் செல்லும் விட்டத்தின் மறுமுனை என்ன? அந்த முனை வழியாகச் செல்லும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டையும் கண்டுபிடி.

3

(1) $2x^2 + 2y^2 + 6x + 8y - 3 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மையத்தையும் ஆரத்தையும் கண்டுபிடி.

[60 A]

(2) X அச்சு, Y அச்சிலிருந்து முறையே 4, 6 அலகுகள் நீளமுள்ள துண்டுகளை உண்டாக்கியும், மூலப்புள்ளி வழியே செல்வதாகவும் உள்ள வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

[60 A]

(3) (0, 1), (2, 3), (−2, 5) என்ற புள்ளிகளின் வழியாகச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடி..

[61 A]

(4) (2, −5) என்ற புள்ளி $x^2 + y^2 - 5x + y - 14 = 0$ என்ற வட்டத்தில் அமைகிறது என்று காட்டு. அப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு என்ன?

[61 S]

(5) (3, −4), (−2, 5) என்பவைகளை விட்ட முனைகளாக வுடைய வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

[63 A]

4

(1) $3x - 4y = 5$ என்ற கோடும், $4x^2 + 4y^2 - 16x - 12y + 21 = 0$ என்ற வட்டமும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளைக் கண்டுபிடி.

(2) $x^2 + y^2 = 400$ என்ற வட்டமும், $x^2 + y^2 - 10x - 24y + 120 = 0$ என்ற வட்டமும் தொடுவட்டங்கள் என்று காட்டு. தொடு புள்ளியைக் கண்டுபிடி.

(3) (−1, −2) என்ற புள்ளி வழியாக $x^2 + y^2 + 6x + 10y - 2 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் மிகச் சிறிய நாணின் சமன்பாடு என்ன? அதன் நீளத்தைக் கணக்கிடு.

(4) $2x + 3y = 8$; $5x - y = 3$ என்பவை ஒரு வட்டத்தின் விட்டங்கள். அவ்வட்டம் (−11, 7) என்ற புள்ளி வழியே செல்கிறது எனில் அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு என்ன?

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

சென்னை-9

1967 வரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

பொருளாதாரம்

*1.	பொருளாதாரம் - II	சி. வேலாயுதம்	9 00
2.	புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள்	திருமதி ஆர். தாமரஜாட்சி	12 00
3.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம் - I	தி. சி. மோகன்	12 00
4.	,, II	எம். ஏ. அபூர்வசாமி, பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	10 75
5.	பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு	க. முத்தையன்	7 00
*6.	பணவியலும் பாங்கியலும் - II	சி. வேலாயுதம்	11 50
7.	நவீன பாங்கு இயல்	க. வெற்றிவேல்	7 50
*8.	இந்தியச் செலாவணியும் பாங்கு முறையும்	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	5 50
*9.	அரசாங்க நிதியியல்	அர. சேஷாசலம்	4 75
10.	இந்தியப் பொருளியல் - I	எம். பாலசுப்பிரமணியன்	10 00
11.	,, II	எம். லூர்து நாதன்	4 25
12.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை - I	சி. சுந்தரராஜன்	10 75
13.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	10 50

*மூல நூல் (Original Book)

பொருளாதாரம்—தொடர்ச்சி

14.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு - I	கீ. சீ. இராமசாமி	6 00
15.	,, II	,,	6 00
16.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி	தி. சி. மோகன்	5 00
17.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு - I	மு. க. சுப்பிரமணியம்	11 00
18.	,, II	பி. வி. சீனிவாசன்	6 00
19.	,, III	,,	6 50
20.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம் - I	மா. குமாரசாமி	10 00
21.	,, II	அர. சேஷாசலம்	9 50
22.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி-I	தே.வேலப்பன்	10 00
23.	,, II	ஜி. சிதம்பரம்	8 00
24.	பணம்—சிறு விளக்கம்	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10 00
*25.	வாணிக இயலின் தத்துவங்கள்	கு. ஆளுடையபிள்ளை	9 50
26.	பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில், வாணிபப் புரட்சி	கூ. ரா. கறுப்பண்ணன்	11 00
27.	பென்ஹாம் பொருளாதாரம் - I	ஏ. குழந்தை	11 00
28.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	7 00
*29.	வரவுசெலவுத் திட்டம்	ஆர். ரங்காச்சாரி	6 00
30.	பன்னாட்டுப் பொருளாதாரம்-I	ஏ. குழந்தை	7 50
31.	,, II	கே. எஸ். இராமசாமி	9 00
32.	பொருளாதார ஆய்வு நூல்-I	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	7 75
33.	,, II	,,	7 00
34.	வளர்ச்சியுறுத நாடுகளின் அரசாங்க நிதியியல்	க. வெற்றிவேல்	4 25

35.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம் பற்றிய சிக்கல்கள்	மா. குமாரசுவாமி	5 50
36.	1939 முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விலைப் போக்குகள்	சி. சுந்தரராஜன்	7 50
37.	பொருளாதார வளர்ச்சிபற்றிய கட்டுரைகள்	எம். கே. சுப்பிரமணியம்	7 75

வரலாறு

*38.	பிரிட்டன் வரலாறு - I	கி. ர. அனுமந்தன்	10 00
*39.	,, II	,,	9 75
*40.	ஐரோப்பிய வரலாறு - I	டி. வி. சொக்கப்பா	4 50
41.	ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றுண்டு காலச் சரித்திரம்	வை, விருத்தகிரீசன்	15 00
42.	இங்கிலாந்து வரலாறு — I	இரா. அண்ணுமலை	13 00
43.	,, II	பா. மாணிக்கவேலு	13 00
44.	,, III	என். ஜே. ராஜகோபால்	8 00
45.	,, IV	,,	8 00
46.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு - I	க. த. திருநாவுக்கரசு	15 00
47.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா	8 00
48.	,, III	,,	5 00
49.	இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு - I	தி. வெ. குப்புசாமி	7 50
50.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	9 00
51.	,, III	அ. பாண்டுரங்கன்	11 00
52.	கிரேக்க நாட்டு வரலாறு - I	சைமன் ஐ. எஸ். பாக்கியநாதன்	7 50
53.	,, II	,,	7 00
54.	,, III	பி. இராமானுஜம் தேவதாஸ்	7 75

*மூலநூல் (Original Book)

வரலாறு—தொடர்ச்சி

55.	ஆக்ஸ்ஃபோர்டின் இந்திய வரலாறு-I	தி. வெ. குப்புசாமி	8 25
56.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	7 50
57.	,, III	க. த. திருநாவுக்கரசு	10 50
58.	முகலாயப் பேரரசு-I	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப், எம். எக்ஸ். மிராண்டா	7 50
59.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா, பா. மாணிக்கவேலு	7 75

அரசியல்

*60.	இந்திய அரசியலமைப்பு	வீ. கண்ணையா	4 75
61.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	டி. செல்லப்பா	8 50
62.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	8 50
63.	பன்னாட்டு அரசியல் - I	திருமதி நூர்ஜஹான் பாவா	16 00
64.	,, II	,,	13 25
65.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல் - I	வீ. கண்ணையா	9 00
66.	,, II	அ. ஜெகதீசன்	7 25
67.	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம் - I	வீ. கண்ணையா	7 50
68.	,, II	டி. செல்லப்பா	7 50
69.	இந்திய அரசியல்மைப்புத் திட்டம்	தி. வெ. குப்புசாமி, எஸ். சுப்பிரமணியன்	9 25
70.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி-I	வீ. கண்ணையா	6 25
*71.	மக்கள் ஆட்சி	க. சந்தானம்	4 25
72.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்	என். ஜே. இராஜகோபால்	7 75

உளவியல்

73.	குழந்தை உளவியல் - I	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	8 00
74.	,, II	,,	7 00

75.	உட்கவர் மனம்	சி. ந. வைத்தீஸ்வரன்	7 00
76.	இளையோர் உளவியல் - I	தி. இரா. அரங்கராசன்	12 00
77.	,, II	,,	9 00
78.	சமூக உளவியல்	என். வேதமணி மானுவேல்	9 25
79.	பிறழ்நிலை உளவியல்	அ. பெசன்ட் கிரீப்பர்ராஜ்	11 00
80.	பித்தரின் உள்ளம்	,,	3 00
*81.	குமர உள்ளம்	டாக்டர் மு. அறம்	6 25

தத்துவம்

82.	இந்து சமயத் தத்துவம்	ஞா. ராஜாபகதூர்	5 50
*83.	அறிவு ஆராய்ச்சி இயல்	ஆர். இராமானுஜாச்சாரி	3 50
*84.	மேலைநாட்டுத் தத்துவம்	ஆர். எஸ். தேசிகன்	3 50
85.	அத்துவித தத்துவம்	கோ. மோ. காந்தி	6 50
86.	ஆங்கிலேயப் பயன்வழிக் கொள்கையினர்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	5 50
87.	இந்தியத் தத்துவம்	வ. அ. தேவசேனபதி, பா. நா. சண்முகசுந்தரம்	3 50
88.	மெய்ப்பொருளியல்—ஓர் அறிமுகம்-I	சி. இராமலிங்கம்	6 00

அறவியல்

89.	அறவியல்—ஓர் அறிமுகம்	கோ. மோ. காந்தி	8 50

அளவையியல்

90.	அளவை இயல்—தொடக்க நூல்	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	2 50

*மூலநூல் (Original Book)

மானிடவியல்

*91.	மானிடவியல்	ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன்	4 75
92.	பண்பாட்டுக் கோலங்கள்	கி. பூ. சுப்பிரமணியன்	5 50
93.	இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை	எஸ். இலட்சுமி	3 50

சமூகவியல்

94.	சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள்	ஜே. நாராயணன்	10 00

புவியியல்

95.	ஆசியா - I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	9 50
96.	,, II	,,	8 75
97.	ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	ஏ. எஸ். நாராயணன்	8 50
*98.	தென்கிழக்கு ஆசியா	ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி	8 50
*99.	வட அமெரிக்கா	குமாரி இரா. அலமேலு	8 25
*100.	தென் அமெரிக்கா	எம். என். பத்மநாபன்	9 00
*101.	தென் கண்டங்கள் - ஆஸ்திரேலியா	திருமதி எச். நியூமன்	4 00
*102.	,, - ஆஃப்ரிக்கா	எஸ். முத்துக்கிருஷ்ணக் கரையாளர்	3 25
*103.	புவிப்புறவியல் - II	நா. அனந்தபத்மநாபன்	6 00
*104.	செய்முறைப் புவியியல்	சு. ஜெயச்சந்திரன்	9 00
*105.	மக்கட் பரப்பியல்	வி. எஸ். அனந்தபத்மநாபன்	6 25
*106.	சமுத்திரவியல்	கோ. இராமசாமி	6 50
107.	காலநிலை இயல் - I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	10 00
108.	,, II	,,	5 00
109.	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	கோ. இராமசாமி	11 00
*110.	புவி அமைப்பு இயல்	சி. விசுவநாதன்	4 75
111.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	கோ. இராமசாமி	6 00

புள்ளியியல்

•112.	புள்ளியியல்—அறிமுகம்	சு. வைத்தியநாதன்	10 00
113.	புள்ளியியல் முறைகள் - I	கோ. சண்முகசுந்தரம்	10 00
114.	,, II	கே. ஆர். இராஜகோபாலன்	14 00
115.	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன்	6 50

உயர்கணிதம்

*116.	ஆயத்தொலே வடிவகணிதம்	டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை	12 50
*117.	வகை நுண்கணிதம்	,,	8 00
*118.	தொகை நுண்கணிதம்	தி. கோவிந்தராசன்	9 00

விலங்கியல்

*119.	விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணுமலை, இரா. முருகேசன்	12 00

பௌதிகவியல்

120.	ஒளி நூல்	ச. சம்பத்து	10 00

விஞ்ஞானம்

*121.	வானவெளி வெற்றி	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	6 00
*122.	ரேடியோ	,, பி. திருஞானசம்பந்தம்	4 75
*123.	எக்ஸ்-கதிர்கள்	பெ. நா. அப்புசாமி, ஜே. பி. மாணிக்கம்	4 50
*124.	பாம்புகள்	பெ. மா. அண்ணுமலை	3 50
*125.	தாவரம்—வாழ்வும் வரலாறும்	டாக்டர் கு. சீனிவாசன்	8 00
*126.	கரும்பு	கு. பெரியசாமி	4 00
*127.	தாவரங்களின் வாழ்வியல்	எஸ். சுந்தரம்	6 50

*மூல நூல் **(Original Book)**

மருத்துவம்

*128.	நீரிழிவு-க்ஷயரோகம்	...	டாக்டர் ஜி. வேங்கடசாமி, டாக்டர் ஏ. கதிரேசன்	2 50
129.	மகப்பேறும் மாதர் நோயும்	...	டாக்டர் (குமாரி) மணிமேகலை	8 25
*130.	பாக்டீரியா	...	சு. சுந்தரம்	2 50
131.	புற்றுநோய்	...	அ. கதிரேசன்	3 50

பொறியியல்

132.	நீங்களே வீட்டைக் கட்டலாம்	...	கே. வி. கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், ஆர். இராமசாமி, கே. வேணுகோபால்	8 50

சட்டம்

*133.	குற்றவியல் சட்டம்	...	எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	10 00

பொது நூல்கள்

134.	மகாத்மா காந்தி	...	சரஸ்வதி தங்கையன்	3 25
135.	விவசாயப் புரட்சி	...	வி. கார்த்திகேயன்	8 00
136.	சேமக் கை-நூல்	...	ஆ. சுப்பிரமணியம்	2 50
*137.	முற்காலச் சோழர் கலையும் சிற்பமும்	...	எஸ். ஆர். பாலசுப்பிரமணியம்	9 00
*138.	உணவும் ஊட்டமும்	...	தி. வேங்கடகிருஷ்ணய்யங்கார்	4 50

புகுமுக வகுப்புகளுக்குரியவை (P.U.C.)

*139.	உலக வரலாறு	...	டி. ஆர். இராமச்சந்திரன்	4 00
*140.	பொருளாதாரம்	...	ஜி. சிதம்பரம்	3 50
*141.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்-I	...	கு. ஆளுடைய பிள்ளை	4 00
*142.	,, -II	...	,,	3 50

* மூல நூல் (Original Book)